Chapitre premier

LETTRE & GRAPHE

COUP D'OEIL SUR L'HISTOIRE DE LA TOPOLOGIE

(Les ponts de Koenigsberg)

Capítulo primero

LETRA Y GRAFO

UN VISTAZO SOBRE LA HISTORIA DE LA TOPOLOGÍA

(Los puentes de Köenigsberg)

La science qui s'est constituée autour des dimensions de l'espace est passée par trois phases successives avant de reconnaître quel est son véritable et unique objet. Ces trois phases se retrouvent dans l'ensemble du déploiement des mathématiques.

La ciencia que se constituyó alrededor de las dimensiones del espacio, pasó por tres fases sucesivas antes de reconocer cual es su verdadero y único objeto .Estas tres fases se encuentran en el conjunto del despliegue de las matemáticas .

1. On a commencé par faire ce qu'on appelait de la «géométrie».

1a. Cette étude, inaugurée par les Grecs, est fondée sur la logique, et accompagnée de vue scientifique et désinteressée sur les objets de l'espace; elle vise à donner un exposé axiomatique et déductif. Ce mode d'exposition s'est imposé dans les «éléments d'Euclide».

1.

Se comenzó por hacer lo que se llamó "geometría".

1a . Este estudio, inaugurado por los griegos , está fundado sobre la lógica y acompañado de una visión científica y desinteresada sobre los objetos del espacio ; es el que apunta a dar una exposición axiomática y deductiva .Este modo de exposición se impone en los "elementos de Euclides".

1b. Il n'est évidemment pas question de topologie de manière explicite dans cette période, mais des problèmes topologiques par leur structure, comme les paradoxes de Zénon [3,9] sont déjà énoncés. Ils seront un ferment pour la topologie future.

1b . En este período no se trata evidentemente de topología de una manera explícita, pero problemas topológicos por su estructura, como las paradojas de Zenón [3,9] son ya enunciados . Ellos serán fermento para la topología futura .

2. Ensuite parut la géométrie analytique.

2a. Il existait au début du second tour de la métaphysique occidentale, une renaissance de la tradition euclidienne avec Galilée. Cependant la géométrie analytique est attachée au témoignage de Descartes, qui a initié ce mouvement scientifique qui s'achève sous nos yeux. Dans cette géométrie, des problèmes de l'espace sont transposés en algèbre des équations (polynômes, algèbre linéaire). Parallèlement, Leibnitz proposera le terme d'«analysis situs» pour nommer la géométrie de situation (ou géométrie de position). Un conflit apparaîtra par la suite entre la géométrie à la manière de Descartes et une géométrie dite synthétique.

2. A continuación apareció la geometría analítica.

2a. Existió al comienzo de la segunda vuelta de la metafísica occidental , un renacimiento de la tradición euclidiana con Galileo . No obstante , la geometría analítica está ligada al testimonio de Descartes, quien inició este movimiento científico cuyo acabamiento se produce en nuestros días . En esta geometría , ,problemas del espacio son transpuestos en álgebra de ecuaciones (polinomios , álgebra lineal) .Paralelamente Leibniz propondrá el término de “análisis situs”, para nombrar la geometría de situación (o geometría de posición) .Un conflicto apareció seguidamente entre la geometría a la manera de Descartes y una geometría llamada sintética .

L'opposition de ces deux géométries tourne autour du recours à un repère dans l'espace des figures, ou de son refus. D'autre part, la géométrie projective (descriptive) se développe: celle dont les transformations (projections) ne conservent pas la plupart des propriétés étudiées en géométrie euclidienne.

La oposición de estas dos geometrías gira alrededor del recurso o el rechazo a ubicar figuras en el espacio en un sistema de referencia . Por otra parte , se desarrolla la geometría proyectiva (descriptiva) : aquella en la cual las transformaciones (proyecciones) no conservan la mayoría de las propiedades estudiadas en geometría euclidiana .

Déterminer ce qui concerne la situation par une analyse des propriétés internes de la figure, constitue *l'analysis situs*. Son originalité réside dans l'abandon des préoccupations métriques (mesure), ce qui peut paraître paradoxal si l'on s'en tient à la géométrie, définie –comme son nom l'indique– par la manière de mesurer toute chose.

Determinar lo que concierne a la situación por un análisis de las propiedades internas de la figura , constituye el *análisis situs* .Su originalidad reside en abandonar las preocupaciones métricas (medida), lo que puede parecer paradojal si nos atenemos a la geometría definida - como su nombre lo indica- por la manera de medir cualquier cosa .

Ces recherches, avec la géométrie projective, ont préparé la géométrie telle que nous pouvons la connaitre aujourd hui. Mais dans ce domaine la géométrie analytique est en défaut sur un point: ce n'est pas qu'elle s'attache à l'algèbre au détriment du dessin, c'est qu'elle s'attache trop servilement à une algèbre spécifique et réduite (algèbre classique, harmonique) au détriment de la structure. Le défaut en question se reproduit à l'étape suivante et jusqu'à aujourd'hui dans l'enseignement général.

Estas investigaciones ,con la geometría proyectiva, prepararon la geometría tal como la conocemos hoy .Pero en este dominio la geometría analítica está en falta en un punto :no es que esté ligada al álgebra en detrimento del dibujo , sino que se liga demasiado servilmente a un álgebra específica y reducida (álgebra clásica armónica) en detrimento de la estructura .El defecto en cuestión se reproduce en la etapa siguiente y hasta hoy en la enseñanza general .

2b. Prenons un exemple de problème dont la solution est contemporaine de cette seconde période. En résolvant le problème des ponts de Koenigsberg [5], Euler apporte une première réponse à une question appartenant à la géométrie de situation. Ce problème sert en général d'introduction à la présentation de la topologie [17] et en l'exposant nous ne saurions faire autrement que de respecter cet usage devenu classique.

2

b.T omemos un ejemplo de problema cuya solución es contemporánea de este segundo período . El resolver el problema de los puentes de Köenigsberg [5] , Euler aporta una primera respuesta a una cuestión perteneciente a la geometría de situación . Este problema sirve ,en general ,de introducción a la presentación de la topología [17]; y al exponerlo no podremos hacer otra cosa que respetar este uso que devino clásico .

A. *La formulation du problème*

Le site, dans lequel ce premier problème fut posé, est un lieu de promenade constitué d'une île, entourée d'un fleuve qui se partage en deux bras, et dont les berges sont reliées entreelles par sept ponts. En voici le dessin (fig. 1).

A. La formulación del problema

El sitio en el cual este primer problema fue planteado , es un lugar de paseo formado por una isla rodeada de un río que se divide en dos brazos y cuyas orillas están unidas entre sí por 7 puentes . He aquí el dibujo (fig 1):

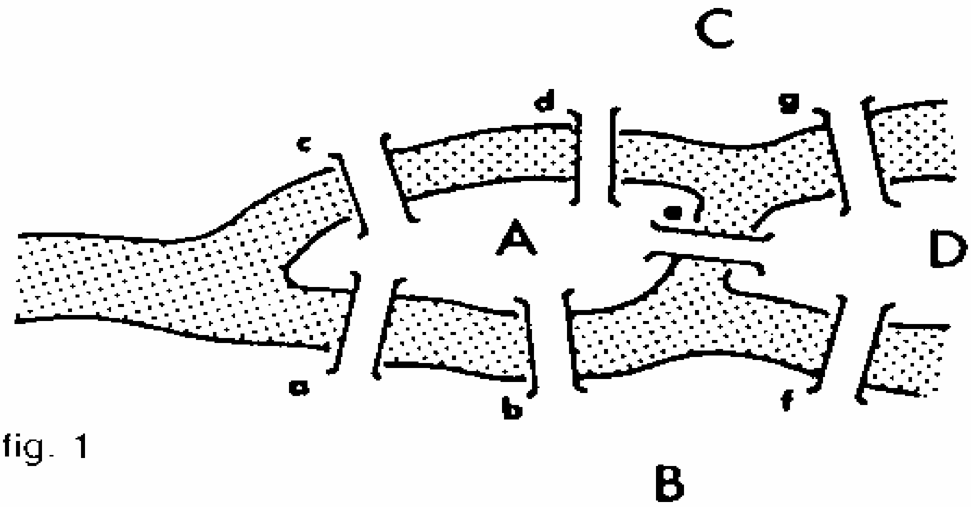


fig. 1

Nommons les zones de terre A, B, C, D. Les ponts sont notés a, b, c, d, e, f, g (fig. 1).

Le problème consiste à décider de la possibilité d'une promenade, pour un flaneur qui ne souhaiterait emprunter chacun des ponts qu'une fois et une seule fois. Remarquons qu'il ne s'agit pas d'arpenter avec un instrument de mesure le territoire de notre problème pour le résoudre.

Llamemos a las zonas de tierra A,B,C,D . Los puentes se denotan con a ,b, c, e ,f, g (fig .1).

El problema consiste en decidir la posibilidad de un paseo para un paseante que no deseara pasar por cada uno de los puentes más que una y sólo una vez . Notemos que no es preciso medir con un instrumento de medida el territorio de nuestro problema ,para resolverlo .

Il suffit de savoir compter jusqu'à sept et de marquer correctement les données. Il faut trouver un jeu d'écriture qui convienne à cette situation. Euler emploie un jeu de lettres majuscules et de lettres minuscules en nombre approprié. Plus tard ce problème a donné naissance à un concept de la théorie des graphes, mais nous ne l'aborderons que dans un second temps. Ce serait proposer trop vite une solution plus récente (le graphe eulérien). Nous y reviendrons.

Es suficiente saber contar hasta siete y marcar correctamente los datos . Es necesario encontrar un juego de escritura (un modo de escribir) que convenga a esta situación . Euler emplea un juego de letras mayúsculas y de letras minúsculas en número apropiado .Más tarde este problema dio nacimiento a un concepto de la teoría de grafos , pero no lo abordaremos sino en un segundo tiempo . Sería proponer demasiado rápido una solución más reciente (el grafo euleriano).Volveremos sobre esto .

B. *La solution due à Euler*

Il est remarquable qu'Euler ait traité ce problème, dans l'article que nous citons, sans recourir à aucun graphe. Il l'a résolu en étudiant des phrases écrites avec le vocabulaire restreint de petites et de grandes lettres qui servent à distinguer les régions de terrain et les ponts.

B. *La solución debida a Euler*

Es remarcable que Euler haya tratado este problema en el artículo que citamos sin recurrir a ningún grafo .Lo resolvió estudiando frases escritas con el vocabulario restringido a pequeñas y grandes letras que sirven para distinguir las regiones de terreno y los puentes ;

Notons que les couples de lettres marquant les régions ne lui suffisent pas pour indiquer le passage d'un pont. Il intercale dans ce couple la lettre minuscule du pont concerné et s'interroge sur des phrases du type de celle-ci: C, d, A, b, B, f, D, e, A,...

Notemos que los pares de letras que marcan las regiones no le son suficientes para indicar el pasaje por un puente ;intercala en este par , la letra minúscula del puente concernido y se interroga sobre frases de este tipo : C, d, A ,b ,B ,f, D ,e A….

Bien qu'il ait remarqué que l'on pouvait noter le passage de la région A à la région B (en empruntant soit le pont a, soit le pont b) par le couple de lettres (A, B), il suivra une autre voie liée à la formulation qu'il adopte.

Si bien remarcó que se podía notar el pasaje de la región A a la región B (cruzando el puente **a** o el puente **b**), por el par de letras **(A,B)** , seguirá otra vía ligada a la formulación que adopta .

Son raisonnement lui fait construire des situations théoriques qui permettent d'assurer la démonstration de lemmes préalables.

Par exemple dans le cas plus simple reproduit ici où il n'y a qu'un bras de fleuve traversé par autant de ponts que l'on voudra:

Su razonamiento le hizo construir situaciones teóricas que permiten asegurar la demostración de lemas preliminares .

Por ejemplo , en el caso más simple reproducido aquí ,donde no hay sino un brazo de río atravesado por tantos puentes como se quiera :

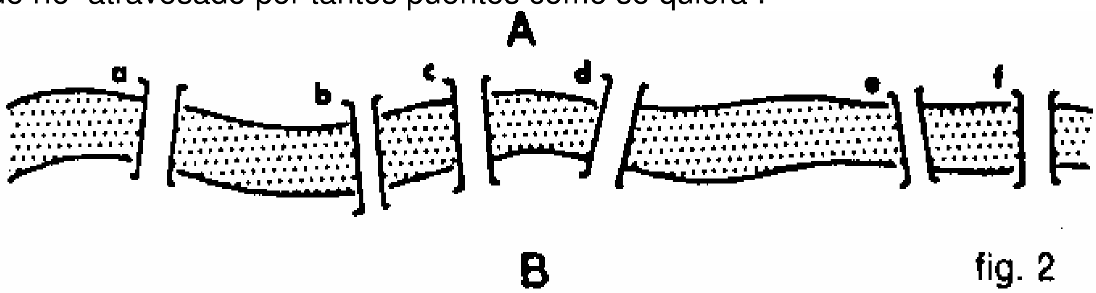


fig. 2

Puis il traite le problème dans le cas général et beaucoup plus compliqué, où il y a plusieurs bras au fleuve entourant plusieurs îles, reliées par des ponts en nombres variés:

Luego ,él trata el problema en el caso general y mucho más complicado donde hay múltiples brazos de río rodeando múltiples islas ligadas por puentes en número variado :

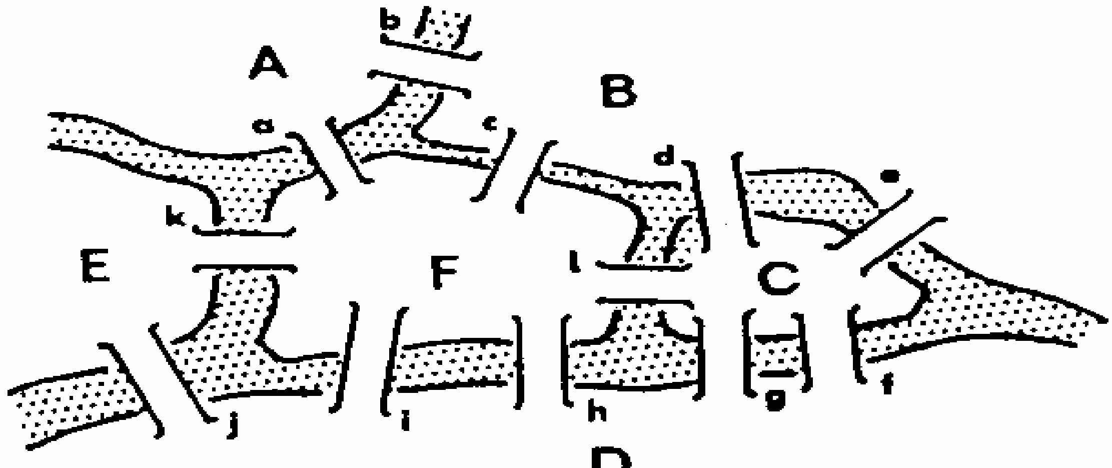


fig. 3

Euler aboutit à la solution, qu'il formule ainsi:

–«Quel que soit donc le cas proposé, on pourra trés facilement reconnaitre sur-le-champ, au moyen de la règle suivante, si le passage une seule fois sur tous les ponts est ou non possible.

Euler llega a la solución que él formula así :

"Cualquiera sea el caso propuesto se podrá muy fácilmente reconocer sobre el campo , por medio de la regla siguiente , si es posible o no, pasar una y sólo una vez por cada puente

S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.» [5]

Si hay más de dos regiones a las cuales conduce un número impar de puentes , ustedes pueden afirmar con certeza que tal pasaje es imposible. Pero si se es conducido solamente a dos regiones por un número impar de puentes , el pasaje es posible pero, comenzando su recorrido por una u otra de estas dos regiones . Finalmente si no hay ninguna región a la cual se sea conducido por un número impar de puentes , el pasaje podrá tener lugar como se desee

,comenzando la marcha por la región que se quiera .Esta regla satisface entonces plenamente el problema propuesto"[5]

Comme il existe une solution plus directe, que nous pouvons donner maintenant, nous ne poursuivrons pas le commentaire de la solution d'Euler. Sa publication présente un intérêt qui n'est pas seulement historique, elle est surtout exemplaire pour ses hésitations et ses interrogations dans l'élaboration d'une méthode.

Como existe una solución más directa que podemos dar ahora , no proseguiremos el comentario de la solución de Euler . Su publicación presenta un interés que no es solamente histórico sino que es sobre todo ejemplar por sus vacilaciones y sus interrogaciones en la elaboración de un método .

C. *La solution plus récente du problème*

Un graphe est fait de points –appellés sommets– et de segments qui joignent ces sommets que l'on nomme arêtes.

Voici le dessin d'un graphe constitué de cinq sommets et de sept arêtes:

C .*La solución más reciente del problema*

Un grafo está hecho de puntos –llamados vértices- y de segmentos que unen estos vértices y que se llaman aristas .

He aquí el dibujo de un grafo constituido por 5 vértices y 7 aristas :

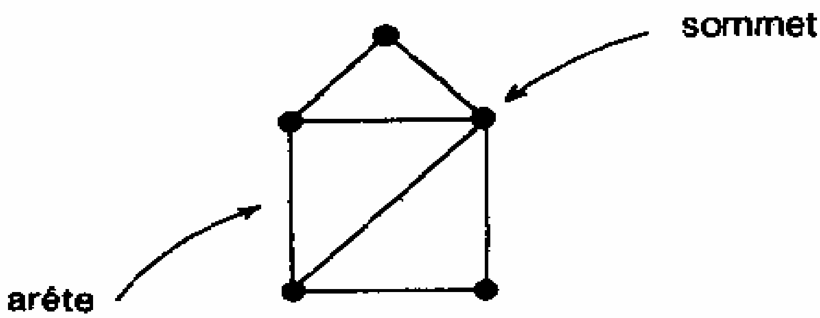


fig. 4

Arete (arista) sommet (vértice)

Un graphe, pour être dit eulérien, doit présenter une caractéristique quant au chemin que l'on peut parcourir en suivant ses arêtes. Il suffit d'emprunter ses sommets en un trajet continu, c'est-à-dire sans rupture ni saut, sans lever son crayon par exemple.

Un grafo , para ser llamado euleriano ,debe presentar una característica en cuanto al camino que se puede recorrer siguiendo sus aristas .Es suficiente tomar sus vértices en un trayecto continuo , es decir sin ruptura ni salto, sin levantar el lápiz por ejemplo .

Notons, pour le lecteur, que nous faisons usage, ici, pour la première fois, du terme de *continu*. Il faut savoir que ce terme définit ce qui relève la topologie. C'est à la *topologie générale*, encore dénommée *topologie ensembliste*, que revient la charge de définir les applications continues. Elle donne donc son cadre à la topologie dans son ensemble. Les applications continues dépendent de la définition des espaces topologiques, de ce que nous appelerons une topologie.[1] Ceci n'est pas réalisé du temps de *l'analysis situs,* celui de la résolution du problème des ponts de Koenigsberg. Cette discipline n'est pas parvenue à constituer la véritable topologie. *Elle ne s'est pas préoccupée de dégager la nature de son objet d'étude*.

Notemos para el lector ,que hacemos uso aquí por primera vez del término *continuo* .Es necesario saber que este término define lo que concierne a la topología .Es a la *topología general* — aun denominada *topología conjuntista* — a quien corresponde definir las aplicaciones continuas . Ella da entonces su marco a la topología en su conjunto . Las aplicaciones continuas dependen de la definición de los espacios topológicos, de lo que llamaremos una topología. [1] Esto , no se realizó en el tiempo del análisis situs , el de la resolución del problema de los puentes de Köenigsberg . Esta disciplina no llegó a constituir la verdadera topología ; e*lla no se preocupó en despejar la naturaleza de su objeto de estudio .*

Cet objet ne peut être cerné qu'à partir des invariants préservés par des transformations, ici continues, comme en toute catégorie d'objets mathématiques.

Este objeto no puede ser cernido sino a partir de los invariantes preservados por transformaciones, aquí continuas , como en toda categoría de objetos matemáticos .

Ces notions ne seront découvertes que plus tard. Nous ne ferons, pour commencer, qu'un usage intuitif du terme de continu (Il s'agit de la connexité par arc).

Estas nociones no serán descubiertas sino más tarde .Para comenzar ,no haremos más que un uso intuitivo del término de continuo (se trata de la conexión por arco).

---

1 1. NONS — La topologie du sujet — Fascicule de résultats n.° 0.

NONS –la topología del sujeto - Fascículo de resultados n° 0

Reprenons l'exposé de notre solution.

Un chemin eulérien est tel que l'on ne passe qu'une fois et une seule fois par chaque arête. Le lecteur perçoit la proximité de cette définition d'avec le problème des ponts mais cela ne fait pas encore solution.

Retomemos la exposición de nuestra solución.

Un ***camino euleriano*** es aquel por el que no se pasa sino una y sólo una vez por cada arista .El lector percibe la proximidad de esta definición con el problema de los puentes ,pero allí no hay aún solución .

Un graphe eulérien est un graphe qui admet un chemin eulérien. Expression condensée, qui donne l'impression de catégories très robustes. Nous avons, cependant, tenu à indiquer les renvois successifs qui permettent de remonter jusqu'aux axiomes.

Un grafo euleriano es un grafo que admite un camino euleriano .
Expresión condensada , que da la impresión de categorías muy robustas .Hemos tenido , sin embargo ,cuidado de indicar las sucesivas remitencias que permiten remontarse hasta los axiomas .

Il reste à traduire le problème des ponts de Koenigsberg en une question ayant trait aux graphes. Pour cela, plaçons un sommet à la place de chaque lettre majuscule, correspondant à chacune des régions de terrain de notre site, et une arête entre deux sommets pour chaque lettre minuscule, correspondant à un pont.

Nous obtenons le graphe suivant:

Queda por traducir el problema de los puentes de Köenigsberg recurriendo a los grafos .Para esto ,ubicamos un vértice en el lugar de cada letra mayúscula correspondiente a cada una de las regiones de terreno de nuestro sitio , y una arista entre dos vértices para cada letra minúscula correspondiente a un puente .
Obtenemos el grafo siguiente :

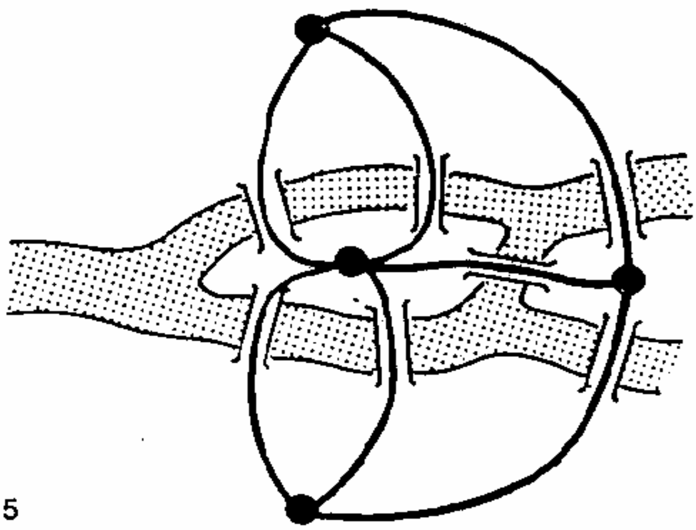


fig. 5

Ainsi traduit, le problème des ponts de Koenigsberg devient:

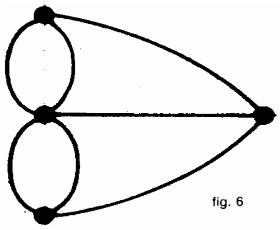


fig. 6

Así traducido el problema de los puentes de Köenigsberg deviene (figura 6) :

Ce graphe est-il eulérien?

Este grafo (figura 6) ¿es euleriano?

D. *Comment reconnaitre qu'un graphe est eulérien?*

Pour reconnaître qu'un graphe est eulérien, nous introduisons la notion de valence, ou de masse, attachée à chaque sommet du graphe en question.

Il s'agit du nombre d'arêtes adjacentes à ce sommet. C'est-à-dire du nombre d'arêtes qui arrivent ou qui partent de ce point.

Voici les graphes précédents (fig. 4 & 6) une fois valués:

D. *Cómo reconocer que un grafo es euleriano*

Para reconocer que un grafo es euleriano ,introducimos la noción de valencia, o de masa ,ligada a cada vértice del grafo en cuestión .

Se trata del número de aristas adyacentes a este vértice . Es decir del número de aristas que llegan o que parten de este punto .

He aquí los grafos precedentes (fig 4 y 6) una vez valuados :

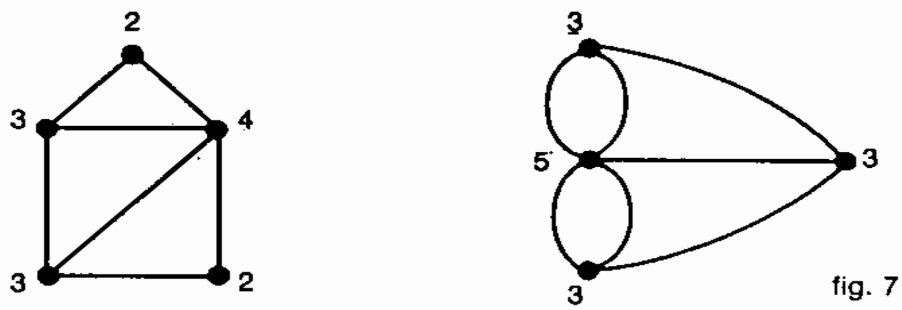


fig. 7

A l'aide de cette notion, et sachant que pour ne pas être arrêté dans la réalisation d'un chemin eulérien, il faut, lorsque l'on atteint un sommet, pouvoir en repartir, le lecteur comprendra que les sommets de valence paire sont plutôt favorables.

Con la ayuda de esta noción y sabiendo que para no ser detenidos en la realización de un camino euleriano. es necesario cuando se alcanza un vértice , poder volver a partir de allí, el lector comprenderá que los vértices de valencia par son más favorables .

Il ne faut pas qu'il y ait plus de *deux* sommets de valence *impaire* pour que l'on puisse réaliser sur un graphe un tel chemin et pour qu'il soit dit graphe eulérien.[2]

Es necesario que haya no más de dos vértices de valencia *impar* para que se pueda realizar un sobre un grafo, un tal camino , y para que sea llamado grafo euleriano [2].

Ces «au-plus-deux» sommets de valence impaire doivent être pris nécessairement, s'ils existent, comme point de départ et comme point d'arrivée, afin de réaliser un chemin eulérien dans ce graphe.

Estos " a lo sumo dos " vértices de valencia impar deben ser tomados necesariamente , si ellos existen, como punto de partida y como punto de llegada , a fin de realizar un camino euleriano en este grafo.

Le lecteur peut s'exercer à vérifier que le graphe pris comme exemple a bien cette propriété, alors que le graphe associé au problème des ponts de Koenigsberg ne l'a pas. *La promenade souhaitée dans cette ville c'est pas réalisable*, comme l'a démontré Euler par un autre raisonnement.

El lector puede ejercitarse en verificar que el grafo tomado como ejemplo tiene ciertamente esta propiedad ,mientras que el grafo asociado al problema de los

2. Note sur les graphes eulériens.
On trouve, en théorie des graphes, une définition des graphes eulériens plus exigeante que celle donnée ici. Elle exige, pour qu'un graphe soit eulérien, qu'il existe un cycle eulérien, c'est-à-dire un chemin fermé qui passe une fois et une seule fois par chaque arête. Cela donne un théorème: Un graphe connexe est eulérien si et seulement si, tous les sommets sont de degré pair. La promenade demandée à Koenigsberg ne réclamait pas qu'elle finisse à l'endroit où elle avait commencé. C'est pourquoi nous nous en tiendrons à la définition donnée dans le texte.

[2] - En teoría de grafos hallamos una definición de los grafos eulerianos más exigente que la dada aquí. Ella exige para que un grafo sea euleriano ,que exista un ciclo euleriano , es decir un camino cerrado que pase una y sólo una vez por cada arista ;Esto da un teorema : un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos los vértices son de grado par .El paseo propuesto en Köenigsberg no reclamaba que terminara en el lugar en donde había comenzado .Es por ello que nos atendremos a la definición dada en el texto.

puentes de Köenigsberg , no la tiene . *El paseo deseado en esa ciudad no es realizable* , tal como lo ha demostrado Euler por otro razonamiento.

Les quelques exemples que nous venons de donner n'ont pas été accompagnés de démonstration; nous nous contentons de donner des résultats, ils appellent bien sûr des preuves.

Los ejemplos que acabamos de dar no han sido acompañados de demostración ; nos contentamos con dar los resultados que están suficientemente probados .

3. La troisième période.

3a. Elle commence avec la découverte des géométries non-euclidiennes. Ce fut l'âge d'or de la geómétrie, qui prit fin avec le «Programme d'Erlangen» de Felix Klein (1872). Ce programme [8] sera l'argument de l'appendice placée à la suite de nos résultats (p. 143).

3. El tercer período.

3a. Comienza con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas . Esta fue la edad de oro de la geometría que terminó con el "Programa de Erlangen " de Félix Klein (1872). Este programa [8] será el argumento del apéndice ubicado a continuación de nuestros resultados (p.143)

Le mérite de la dissertation de F. Klein fut de développer l'idée qu'une géométrie est l'étude des invariants d'un certain groupe de transformation – et par là, de provoquer l'abandon des controverses stériles entre la tendance synthétique et la tendance analytique.

El mérito de la disertación de F. Klein fue desarrollar la idea de que, una geometría es el estudio de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones , y por ello provocar el abandono de las controversias estériles entre la tendencia sintética y la tendencia analítica .

Malgré cela l'obscurantisme traditionnaliste ressurgit régulièrement dans un faux débat dont la topologie ou la théorie des ensembles font momentanément les frais. Il semble qu'il y ait une horreur froide, provoquée par cet aspect de la structure.[3]

A pesar de esto, el oscurantismo tradicionalista resurgió regularmente en un falso debate cuyos costos fue momentáneamente pagado por la topología o la teoría de conjuntos ; parece que hubiera un sudor frío provocado por este aspecto de la estructura [3]

3b. Cette série de fascicules consiste à présenter des problèmes et des résultats de topologie contemporains de cette troisième période.

3b. Estas serie de fascículos consiste en presentar problemas y resultados de topología contemporáneos de este tercer período .

Felix Klein introduit la notion d'invariant. La géométrie se résume à l'étude d'invariants euclidiens (métriques) on d'invariants cartésiens (polynomiaux) par exemple. Grâce à cette notion on ne voit plus dans les autres aspects de l'espace, par exemple les invariants topologiques (continuité) des curiosités compliquées ou de trop grande généralité. Ils perdent ainsi leur réputation d'étre incompréhensibles parce que troublant l'intuition habituelle, dictée par les géométries de l'antiquité ou du monde classique.

Félix Klein introduce la noción de invariante .La geometría se limita al estudio de invariantes euclidianos métricos o de invariantes cartesianos (polinómicos) por ejemplo .Gracias a esta noción ,ya no se ven en los otros aspectos del espacio, por ejemplo, en los invariantes topológicos (continuidad) , curiosidades complicadas o de excesiva generalidad . Ellos pierden así su reputación de ser incomprensibles

3. Si grands que soient les services rendus par ce mathématicien, puisque son abord fait la lumière sur l'ensemble de la question, on ne peut pas dire que son point de vue soit accepté hors du cercle des spécialistes, responsables, sans doute, de cette situation.

Il n'est qu'à noter le fait, qu'à chaque génération, depuis lors, ce qui paraît de meilleur retrouve toujours l'aperçu de F. Klein. Ouvrez la «Pensée sauvage» de C. Lévi Strauss, au chapitre 3 –les systèmes de transformations– ou «Aspects de la théorie syntaxique» de N. Chomsky, au chapitre 3 –structures profondes et transformations grammaticales–. S'agit-il de simples jeux de mots?

Par contre, l'ensemble des commentaires et des enseignements qui s'en déduisent reste en retrait à chaque fois.

3 - Por grandes que sean los servicios prestados por este matemático, ya que su abordaje ilumina el conjunto de la cuestión , no puede decirse que su punto de vista sea aceptado fuera del círculo de los especialistas , responsables ,sin duda, de esta situación .

No hay más que notar el hecho de que en cada generación, desde entonces , lo que aparece como nuevo, reencuentra siempre la visión de F.Klein . Al abrir el "Pensamiento salvaje" de C. Lèvi Strauss , en el cap. 3 - los sistemas de transformaciones - ó "Aspectos de la teoría sintáctica " de N. Chomsky en el cap. 3- estructuras profundas y transformaciones gramaticales- .¿Se trata de simples juegos de palabras?

Por el contrario , el conjunto de los comentarios y de las enseñanzas que de allí se deducen, quedan al margen una y otra vez .

en tanto trastornan la intuición habitual dictada por las geometrías de la antigüedad o del mundo clásico .

F. Klein permet de voir dans la géométrie une articulation produite par une catégorie de relations. Par là même il est possible de comprendre combien étaient insuffisantes les idées des géométries passées, bien qu'elles restent admirables lorsqu'elles sont considérées dans leur cohérence propre.

Félix Klein permite ver en la geometría una articulación producida por una categoría de relaciones .Por eso mismo es posible comprender cuan insuficientes eran las ideas de las geometrías pasadas , si bien ellas permanecen admirables cuando son consideradas en su propia coherencia .

Exercices:

Ejercicios

La topologie exige une assimilation effective afin que son usage soit sérieusement discuté. Ainsi proposons nous quelques exemples pratiques, dont la visée est de s'y exercer.

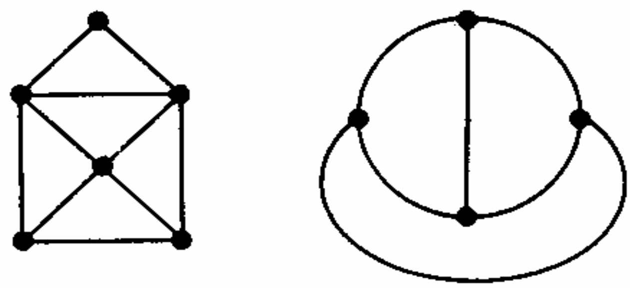
La topología exige una asimilación efectiva a fin de que su uso sea seriamente discutido. Proponemos así algunos ejemplos prácticos que apuntan a ejercitar esto .

Exercice 1: Nous pouvons déduire de ces notions un premier exercice à proposer au lecteur, afin qu'il vérifie qu'il a assimilé ces rudiments: Tracer le graphe eulérien dont nous donnons l'exemple (fig. 4 et fig. 7), d'un trait de mine sans lever le crayon.

Ejercicio 1: De estas nociones ,podemos deducir un primer ejercicio para proponer al lector ,a fin de que verifique que ha asimilado estos rudimentos : trazar el grafo euleriano cuyo ejemplo dimos (fig. 4 y fig. 7), de un solo trazo, sin levantar el lápiz .

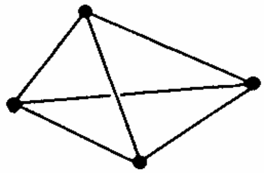
Exercice 2: Peut-on en faire autant dans les cas des graphes suivants?

Ejercicio 2 : ¿Se puede hacer lo mismo en el caso de los grafos siguientes?



Exercice 3: Peut-on parcourir le graphe formé par un tétraèdre (pyramide)

Ejercicio 3 : ¿se puede recorrer el grafo formado por un tetraedro (pirámide)



selon un chemin eulérien? Pour l'anecdote, si elle peut inciter certains à franchir le pas, nous nous souvenons que le Docteur Lacan n'hésitait jamais à reparcourir ce problème lorsqu'il se présentait. Nous pouvons en témoigner pour l'avoir plusieurs fois assisté dans cette réflexion, toujours source de surprises renouvelées.

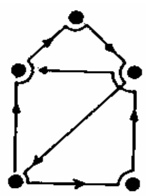
según un camino euleriano?
A modo de anécdota , si pudiera incitar a alguien a franquear el paso , recordamos que el doctor Lacan no vacilaba jamás en volver a recorrer este problema cada vez que se presentaba ;podemos dar testimonio de ello por haber asistido muchas veces a esta reflexión , fuente siempre de renovadas sorpresas .

Corrigés.

Exercice 1: Le dessin d'un trait, sans lever le crayon, est réalisable pour le graphe de la fig. 4 (et 7), les valeurs paires sont en nombre suffisant.

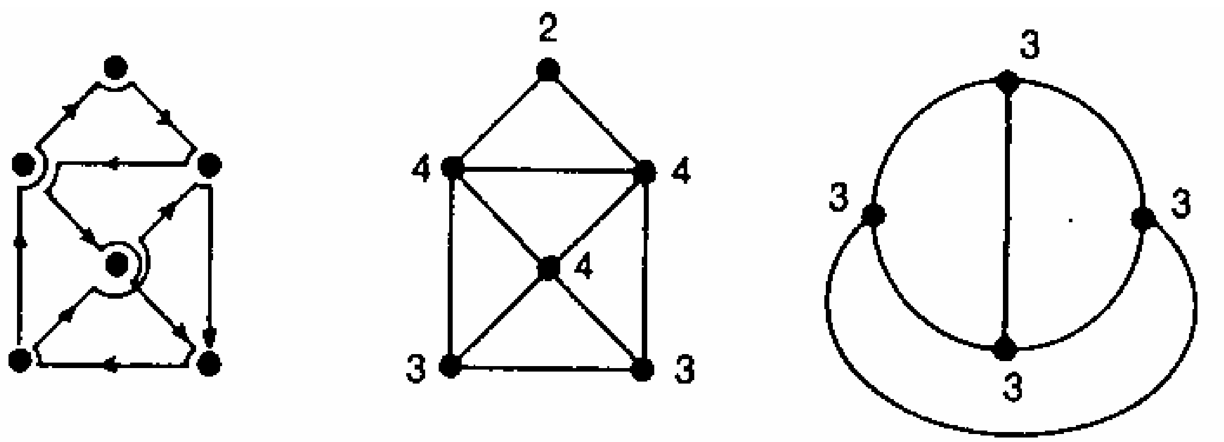
Correcciones :

Ejercicio 1 : el dibujo de un trazo sin levantar el lápiz es realizable para el grafo de la figura 4 (y 7) ; hay un número suficiente de valores pares .



Exercice 2:
La réponse est oui pour le premier. Non pour le second, qui n'a que des valeurs impaires.

Ejercicio 2 : la repuesta es sí para el primero. No para el segundo que sólo tiene valores impares :



Exercice 3: La réponse est non. Le tétraèdre plongé à la surface d'une sphère donne le graphe dont une présentation planaire est fournie par la seconde question de l'exercice précedent, où la réponse est négative.

Ejercicio 3 : La respuesta es no . El tetraedro sumergido en la superficie de una esfera da el grafo del cual una representación planar es provista por la segunda pregunta del ejercicio precedente , cuya respuesta es negativa .

La correspondance entre la présentation spatiale du tétraèdre et sa présentation planaire est montrée a l'aide d'une sphère sur laquelle il est posé.

La correspondencia entre la presentación espacial del tetraedro y su presentación plana es mostrada con la ayuda de una esfera sobre la cual está apoyado .