ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Mónica Lidia Jacob

El presente texto tiene por objetivo presentar algunas estructuras algebraicas de manera coloquial, sin hacer un estudio profundo de las mismas ; pretende simplemente dar a conocer algunas de sus propiedades y apreciar las diferencias entre ellas .

Las estructuras algebraicas pueden estar formadas por uno o mas conjuntos , por una o mas operaciones y por un conjunto de axiomas .

La **estructura algebraica elemental**, es el **monoide** [1] , que consiste en **un solo conjunto A** provisto de **una** operación $*$. Vamos a escribir esa estructura así : $(A,*)$. La operación $*$, es tal que cumple un axioma llamado **Ley de cierre o Ley de composición interna** . Según este axioma , a cada par de elementos del conjunto, le corresponde un elemento que está **en el conjunto** . Por ejemplo $(\mathbb{N},+)$ el conjunto de los número naturales con la suma , es un monoide porque a **todo par** de números naturales les asocia otro número natural que es su suma . Por ejemplo ,al par (2,3) le hace corresponder el número natural 2+3 que es 5 . Al par (3,4) le corresponde el número 3+4 que es 7 .

Si tomamos el mismo conjunto con otra operación, por ejemplo los naturales con la resta, ya no tenemos un monoide , porque no siempre restar naturales da un natural ; por ejemplo al par (2,3) no le podemos hacer corresponder la resta 2-3 porque (-1) no es un número natural .

La escritura formal de la ley de cierre o ley de composición interna es

$$\begin{aligned} * : AxA &\rightarrow A \\ (a,b) &\rightarrow a*b \end{aligned}$$

O bien :

$$a \in A \wedge b \in A \Rightarrow (a*b) \in A \qquad \forall a, \forall b$$

Entre los axiomas que pueden o no ser satisfechos por un conjunto provisto de una operación , se encuentran :

Propiedad asociativa :

¿ En qué consiste la propiedad asociativa? Como la operación $*$ es binaria, opera sobre **dos** elementos ¿Qué pasa entonces si queremos componer 3

[1] Sigo la clasificación del Dr. Enzo Gentile en Estructuras algebraicas I , año 1977 Monografía 3 .OEA Hay otros autores que nombran monoide a la estructura que yo voy a llamar semigrupo . En lo que hay consenso universal es a qué se llama grupo y grupo abeliano.

elementos a, b, c ? Podríamos operar con los dos primeros para obtener el elemento (a $*$ b) y luego operar este resultado , este paréntesis , con c ; eso se escribe

(a $*$ b) $*$ c .

Pero también sería posible componer a con el resultado (b $*$ c) ,obtenido a partir de componer b con c .Si ambas posibilidades conducen al mismo número se dice que se cumple la propiedad asociativa .La suma de número naturales es asociativa , la multiplicación también . La escritura de la propiedad asociativa es :

$$\forall a \in A, \forall b \in A, \forall c \in A \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$$

Observen que a, b, y c están en un mismo orden pero los paréntesis han cambiado de lugar . Bien, si ambos miembros son iguales, si vale la asociativa, no es necesario poner los paréntesis .

Elemento neutro

Se dice que un elemento particular del conjunto A es el elemento neutro y se lo designa con la letra e , si , operando sobre cualquier otro elemento x del conjunto A , a izquierda y a derecha , da por resultado el mismo x. Formalmente , se escribe

$$\forall x \in A, \exists e \in A \; tal \; que: e*x = x*e = x$$

En **($\mathbb{N}$,+)** , naturales con la suma , el 0 es el elemento neutro puesto que sumar cero a cualquier natural x , da por resultado x . Si en cambio , consideramos la estructura ($\mathbb{Z}$, •) de número enteros con el producto, el número entero 1 es el neutro ya que multiplicando por 1 cualquier número entero x, obtenemos x .

Elemento simétrico

Si una estructura tiene elemento neutro, e, entonces vamos a decir que cada elemento **x**, tiene un simétrico **x'** , siempre que al componer **x** con **x'** , se obtenga el elemento neutro . La escritura pertinente a este axioma es :

$$\forall x \in A, \exists x' \in A \; tal \; que: x*x' = x'*x = e$$

Si la operación $*$ es la suma , al simétrico de x se lo llama el **opuesto** de x y se escribe (– x) ; si en cambio la operación $*$ fuera la multiplicación , al simétrico de x se lo llama el **inverso** de x y su notación es x^{-1} .

Mónica Lidia Jacob
mljacob167@gmail.com

En la estructura ($\mathbb{Z}$,+) de enteros con la suma , el neutro es el 0 y el opuesto de 3 es (− 3) y el opuesto de (− 5) es 5 . En la estructura ($\mathbb{Z}$-{0} ; •) de enteros **diferentes de cero**, con la multiplicación , el inverso de 3 es 3^{-1}, o sea, $\frac{1}{3}$.

Propiedad conmutativa :

Es bastante conocida y dice que el orden en que se efectúa la operación no cambia el resultado . Así 2+3 = 3+2= 5 , como así también 2• 3= 3• 2=6

$$\forall a \in A, \forall b \in A \qquad a * b = b * a$$

Tenemos entonces , para **un conjunto A y una operación** ∗ , 5 axiomas . Según la cantidad de axiomas que respete un par **(A,∗)** tenemos la siguiente clasificación de estructuras de complejidad creciente :

(A,∗)

- **A_1 : Ley de cierre** } **Monoide**
- **A_2: asociativa**
- **A_3: neutro**
- **A_4: inverso**
- **A_5: conmutativa**

Semigrupo (A_1, A_2)

Semigrupo con neutro (A_1–A_3)

Grupo (A_1–A_4)

Grupo conmutativo o abeliano (A_1–A_5)

El **grupo abeliano** es la estructura mas compleja y rica dentro de las mas simples , es decir de las que se pueden obtener a partir de UN CONJUNTO Y UNA OPERACIÓN .

Pasemos ahora a las estructuras algebraicas definidas a partir de **UN CONJUNTO A con DOS OPERACIONES ∗, o,** es decir , a la terna (A, ∗,**o**)

En este caso vamos a definir las siguientes estructuras : anillo, anillo con identidad y cuerpo . Para poder hacer un cuadro con las mismas, primero tenemos que definir dos nuevos axiomas : distributiva a izquierda y derecha , de la operación □ ,con respecto a la operación ∗ .Son dos axiomas que van a conectar las dos operaciones entre sí .

Mónica Lidia Jacob
mljacob167@gmail.com

A_6: distributiva a izquierda

$$\forall a\in A,\forall b\in A,\forall c\in A \qquad a\circ(b*c)=a\circ b*a\circ c$$

A_7: distributiva a derecha

$$\forall a\in A,\forall b\in A,\forall c\in A \qquad (a*b)\circ c=a\circ c*b\circ c$$

Ejemplos numéricos de distributividad ; para la suma y el producto de naturales , vale por ejemplo que

2 • (5+3) = 2• 5 + `2• 3.
2 • 8 = 10 + 6
16 = 16

Y también

(2+5)• 3 = 2• 3+ 5 • 3
7 • 3 = 6 + 15
21 = 21

Veamos entonces los nombres de las estructuras formadas por un conjunto A y dos operaciones .

Si el conjunto A con la primer operación $*$ es un grupo abeliano , y el conjunto A con la segunda operación es un semigrupo y la segunda operación es distributiva a izquierda y derecha con respecto a la primera, entonces tenemos un anillo .

Si a la estructura de anillo le agregamos el axioma 3 para la segunda operación , la estructura es un anillo con unidad o con identidad

(A,$*$) grupo abeliano[axiomas1a 5]
(A, o) semigrupo [axiomas 1 y 2]
Axiomas 6 y 7
} **anillo**

Axioma 3 en (A,o)
} **anillo con unidad**

Axiomas 4 y 5 en (A- {e} ,o)
} **cuerpo**

Es decir que un cuerpo es una estructura en la cual el conjunto A con la primer operación es grupo abeliano y el conjunto obtenido de A sustrayéndole el neutro de la primer operación , es abeliano con la segunda operación y además , se verifican las distributivas a derecha e izquierda , de la segunda operación con respecto a la primera.

Vamos a pasar ahora al caso de **DOS CONJUNTOS Y DOS OPERACIONES para definir la estructura llamada espacio vectorial**

(V, ∗, K, •) es un espacio vectorial si :

El conjunto V con la primer operación , (V,∗) , es un grupo abeliano , es decir que verifica los 5 axiomas desde A_1 hasta A_5.

El conjunto K es un cuerpo llamado cuerpo de escalares .

La operación • es una <u>acción externa</u> , es decir que , a diferencia de la operación ∗ que toma dos elementos de A y los compone ; esta acción •, toma un elemento de K y lo compone con uno de A .

A_8 : Ley externa o acción de K sobre V

$$\begin{aligned} \bullet : KxV &\to \quad V \\ (k,v) &\to k \bullet v \end{aligned}$$

Este axioma 8 también se puede escribir así :

$$k \in K \wedge v \in V \Rightarrow (k \bullet v) \in V \qquad \forall k, \forall v$$

Y además se deben verificar los siguientes nuevos axiomas

A_9 Asociatividad mixta

Dados dos elementos k y m pertenecientes al cuerpo K , y un elemento v en V , realizar la acción de k sobre el resultado de la acción de m sobre v , da lo mismo que operar primero los dos escalares k y m según las leyes de K , y el resultado de esa operación hacerlo actuar sobre v :

$$\forall k \in K, \forall m \in K, \forall v \in V \qquad k.(m \bullet v) \ = (k.m) \bullet v$$

A_{10} Distributiva con respecto a la suma en K

Sumar dos escalares en K y hacer actuar esa suma sobre el vector v , es lo mismo que hacer actuar primero cada escalar sobre el vector y componer ambos resultados por medio de la operación ∗ en V

$$\forall k \in K, \forall m \in K, \forall v \in V \qquad (k+m) \bullet v = k.v * m.v$$

A_{11} Distributiva con respecto a la suma en V

La acción de un escalar sobre la suma en V de dos vectores , da el mismo resultado que hacer primero actuar el escalar sobre cada uno de los vectores y sumar en V los resultados obtenidos .

$$\forall k \in K, \forall v \in V, \forall w \in V \qquad k \bullet (v * w) = k \bullet v * k \bullet w$$

A_{12} : La unidad del cuerpo K es el neutro para la acción externa

Si llamamos 1 a la unidad de K

$$1 \bullet v = v \qquad \forall v \in V$$

Es decir que **(V,∗ ,K ,•) es un espacio vectorial** si (V,∗) satisface los axiomas A_1 hasta A_5 (reemplazando la letra A con que designábamos el conjunto, por la letra V con que la designamos ahora) .Y además, si satisface los axiomas desde A_8 hasta A_{12}.

Resumiendo

Lo mas importante para observar es que un grupo está constituido por un conjunto y una operación que cumplen una serie de axiomas .

Para tener un anillo y un cuerpo, ya hay que partir de un conjunto munido de dos operaciones que satisfagan numerosos axiomas .

Para tener un espacio vectorial hay que tener dos conjuntos — uno de ellos ya debe ser un cuerpo — y también disponer de dos operaciones , una interna al conjunto V que se llama conjunto de vectores y otra externa a ese conjunto, que se denomina la acción del cuerpo sobre el conjunto de vectores .

Todos estos son espacios literales algunos de los cuales se pueden ubicar en los ejes cartesianos como entes geométricos clásicos, pero lo importante no es eso, sino el cumplimiento de las coerciones determinadas por toda la axiomática .

En un próximo texto abordaré la estructura de álgebra de Boole en la que es necesario definir un orden entre los elementos .

Lic. Mónica Lidia Jacob
1º edición : julio 2002
Revisión : agosto 2018
Bs.As. CABA