Chapitre V

CHAINE & NŒUD

PRINCIPES DE TOPOLOGIE DU NŒUD

(l'Algorithme solution de notre problème)

Capítulo V

CADENA Y NUDO

PRINCIPIOS DE TOPOLOGÍA DEL NUDO

(El algoritmo solución de nuestro problema)

1. Les espèces graphiques

Le problème posé se déploie dans le volume, dans l'espace autour du nœud; les mathématiciens disent sa *variété*.

Nous pratiquons la topologie en basses dimensions: le nœud tient à la différence entre une ligne, de dimension 1, et un espace, de dimension 3. Cette différence définit la codimension 2. Ce que nous voulons souligner ici, c'est que la troisième dimension ne nécessite pas la dimension 3. Par là, nous rapportons notre problème autant qu'il se peut au plan, de dimension 2.

Nos dessins imagent le volume dans lequel s'effectue le trajet autour du nœud; mais ce sont des mises à plat. La mise à plat est une commodité; qu'elle soit effective moyennant quelques précautions indique bien que notre topologie se joue entre deux et trois dimensions.

1. Las especies gráficas

El problema planteado se despliega en el volumen, en el espacio alrededor del nudo; los matemáticos lo llaman su ***variedad.***

Nosotros practicamos la topología en bajas dimensiones: el nudo concierne a la diferencia entre una línea, de dimensión 1, y un espacio, de dimensión 3. Esta diferencia define la codimensión 2.Lo que queremos subrayar aquí, es que la tercera dimensión no necesita la dimensión 3. .Por eso , en la medida de lo posible , transportamos nuestro problema al plano, de dimensión 2.

Nuestros dibujos ponen en imagen el volumen en el cual se efectúa el trayecto alrededor del nudo; pero son aplanamientos . El aplanamiento es una comodidad; el hecho de que sea efectiva , mediando algunas precauciones indica que nuestra topología se juega entre dos y tres dimensiones.

a) De la mise à plat du nœud

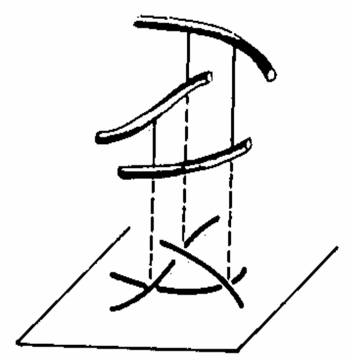
a) Del aplanamiento del nudo

La restriction que nous venons d'évoquer n'est pas gênante si nous maintenons la distinction entre mise à plat et mise en plan.

La mise à plat est une projection partielle du nœud qui s'assure de deux particularités:

1.° Trois points distincts du nœud n'ont jamais la même projection.

La restricción que acabamos de mencionar no será perturbadora si mantenemos la distinción entre aplanamiento y puesta en plano; el aplanamiento es una proyección parcial del nudo que se asegura de dos particularidades:
1 ° : Tres puntos distintos del nudo, no tienen nunca la misma proyección.

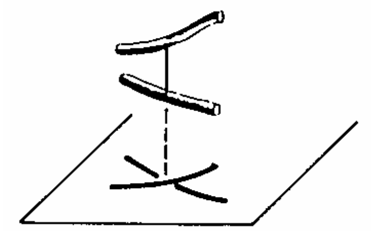


Dans cet exemple, en trois endroits, deux points au maximum ont un même point de projection. Les autres points se projettent univoquement.

Pour le dire autrement, deux points *au plus* forment un croisement. Seul figure celui qui est au-dessus de l'autre, l'élément de rond qui est au-dessous paraît alors interrompu.

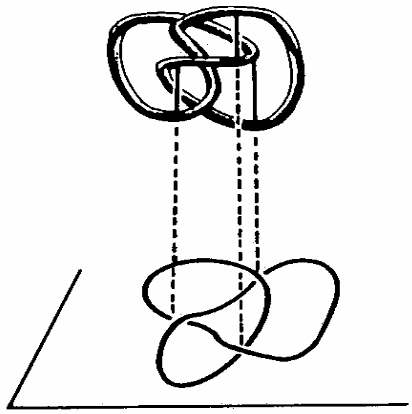
En este ejemplo, en tres lugares, dos puntos como máximo tienen un mismo punto de proyección. Los otros puntos se proyectan unívocamente.

Para decirlo de otra manera, a lo sumo dos puntos, forman un cruzamiento. Sólo figura, el que está por arriba del otro; el elemento de redondel que está debajo aparece entonces interrumpido.



2.° Les points, projections d'un unique point du nœud, forment des arcs (courbes continues) sans singularités.

2° Los puntos, proyecciones de un único punto del nudo, forman arcos (curvas continuas) sin singularidades.



En mathématique, on appelle une telle projection: «en position générale».

Le point de projection de deux points superposés donne lieu à la question essentielle des croisements (sur-croisement ou sous-croisement), plus communément désigné du couple d'opposition *dessus-dessous.*

Il faut impérativement préserver cette nuance rendue dans le dessin par le tracé d'un des brins de l'arc du nœud et l'ommission de l'autre. A la hauteur du croisement, nous ne dessinons que le brin qui passe au-dessus et nous interrompons celui qui passe en dessous.

En matemática se llama a una tal proyección: " en posición general ".

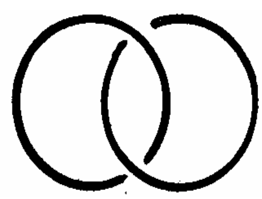
El punto de proyección de dos puntos superpuestos da lugar a la cuestión esencial de los cruzamientos (sobrecruzamiento o subcruzamiento), más comúnmente designado por el par de oposición ***arriba –abajo***.

Es necesario ,imperativamente ,preservar este matiz dado en el dibujo, por el trazo de una de las hebras del arco del nudo y la omisión de la otra. A la altura del cruzamiento , sólo dibujamos la hebra que pasa por arriba e interrumpimos la que pasa por abajo.

Cette interruption délimite plusieurs arcs dans la mise à plat du nœud.

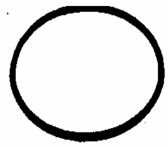
Esta interrupción delimita numerosos arcos en la puesta en plano del nudo.

Dos arcos en este caso del enlace .



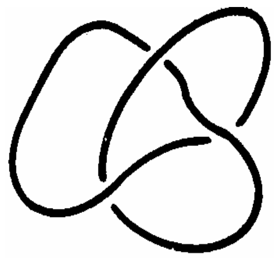
Deux arcs dans ce cas de l'enlacement.

Uno solo, evidentemente para el redondel simple



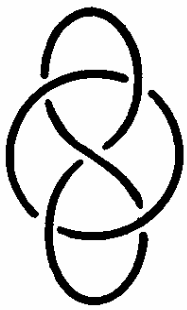
Un seul, évidemment pour le rond simple.

Tres arcos, aquí, están delimitados



Trois arcs, ici, sont délimités.

Cinco, en esta presentación del nudo de Whitehead



Cinq dans cette présentation du nœud de Whitehead.

Cet artifice du dessin nous assure que c'est de la position du nœud dans l'espace qu'il s'agit; ce que nous appelons son plongement *dans l'espace.*

Este artificio del dibujo nos asegura que es de la   posición del nudo en el espacio de lo que se   trata; lo que nosotros llamamos su sumersión en el espacio

Un dessin, qui ne respecte pas ces conditions et ce mode de présentation du nœud, peut présenter des intercroisements qui sont de véritables intersections.

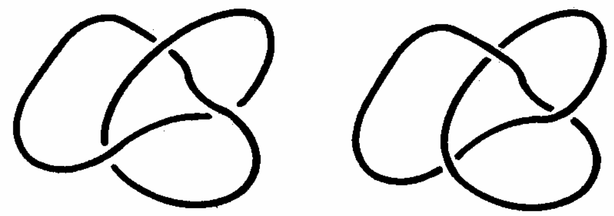
Nous dirons, dans ce cas, que le nœud mis en plan aura été laissé-en-plan. Pour le dire autrement, il s'agit d'une immersion *dans le plan.*

Listing utilise les termes de *Uberkreuzung* qu'on peut rendre par le terme français de sur-croisement et *Durchkreuzung* qu'on peut traduire par entre-croisement [12].

Un dibujo que no respete estas condiciones y este modo de presentación del nudo, puede presentar entrecruzamientos que son verdaderas intersecciones.

Diremos, en este caso, que el nudo puesto en plano, habrá sido dejado en plano. Para decirlo de otra manera se trata de una inmersión ***en el plano***.

Listing utiliza los términos de Uberkreuzung que puede traducirse por el término francés de sobrecruzamiento y Durchkreuzung   que puede traducirse por entrecruzamiento [12]



Exercice: Laisser en plan ces deux nœuds trèfle. Qu'est-ce qui les distingue désormais?

Comme il n'y a pas d'inter-croisements dans la mise à plat, nous utiliserons le terme de croisement, ou dessus-dessous, indifférem-ment pour ceux de sur-croisement ou sous-croisement.

Nous parlerons aussi du plan de la mise à plat, pour désigner le plan sur lequel le nœud est supposé mis à plat.

Ejercicio: Dejar en plano estos dos nudos trébol. ¿qué es lo que los distingue en lo sucesivo?

Como no hay entrecruzamientos en el aplanamiento utilizaremos el término de cruzamiento o arriba - abajo, indiferentemente para los de sobrecruzamiento o subcruzamiento.

Hablaremos así, del plano del aplanamiento , para designar el plano sobre el cual el nudo es supuesto aplanado.

b) De la présentation du nœud

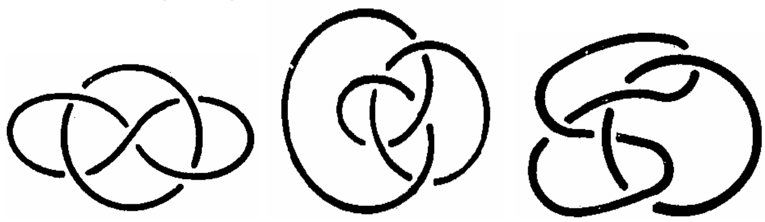
Un nœud mis à plat se compose donc d'arcs et de croisements qui le caractérisent, ou plutôt qui caractérisent *une présentation* du nœud mis à plat.

Le terme de présentation est à entendre comme la manière dont le nœud se présente (ce terme vient de la théorie des groupes). Un même nœud a de multiples présentations mise-à-plat.

De la presentación del nudo

Un nudo aplanado se compone entonces de arcos y de cruzamientos que lo caracterizan o, más bien , que caracterizan ***una presentación*** del nudo aplanado .

El término de presentación debe ser entendido como la manera en la cual el nudo se presenta (este término viene de la teoría de grupos).
Un mismo nudo tiene múltiples presentaciones aplanadas



Exercice: Y a-t-il moyen de passer d'une de ces chaînes à une autre par des déformation souples et continues?

Nous donnons des exemples de changement de présentation par la suite (p. 116).

Ejercicio : ¿hay manera de pasar de una de estas cadenas a otra por deformaciones flexibles y continuas? A continuación damos ejemplos de cambio de presentación (p.116)

c) Des zones

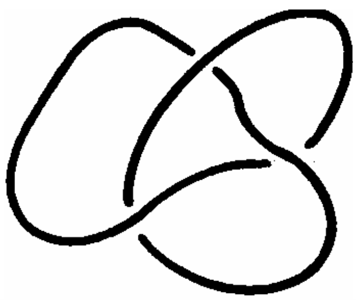
Revenons sur ce qui caractérise une présentation donnée: Les arcs et les croisements. Ils délimitent, dans le plan de la mise à plat, un certain nombre de zones.

Une zone est caractérisée par le nombre d'arcs qui la borde; il est égal au nombre de croisements dont elle est adjacente. Il y a donc des zones à un arc (et donc adjacente à un croisement), ce sont des boucles selon la terminologie de Listing; il ya aussi des zones a deux arcs (adjacente à deux croisements), et puis des zones a trois arcs (adjacente à trois croisements) que Listing appelle maille, etc.

b) Zonas

Volvamos sobre lo que caracteriza una presentación dada: los arcos y los cruzamientos. Ellos delimitan, en el plano del aplanamiento , un cierto número de zonas.

Una zona se caracteriza por el número de arcos que la bordea; ese número es igual al número de cruzamientos de los cuales es adyacente Hay entonces zonas con un arco (y entonces, adyacente a un cruzamiento), son bucles según la terminología de Listing; hay también zonas de dos arcos (adyacente a dos cruzamientos y luego zonas de 3 arcos (adyacente a tres cruzamientos) que Listing llama malla, etc.



La zone extérieure obéit aux mêmes principes que les autres; malgré le rôle particulier que nous lui verrons jouer un peu plus loin, c'est une zone comme les autres.

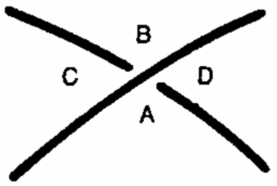
La zona exterior obedece a los mismos principios que la otras; a pesar del rol particular que le veremos jugar un poco más adelante, es una zona como las otras.

d) Des croisements

Chaque croisement a quatres zones adjacentes, deux à deux opposées par le sommet: A/B et C/D.

d) Cruzamientos

Cada cruzamiento tiene cuatro zonas adyacentes, dos a dos opuestas por los vértices A/D y C/D.

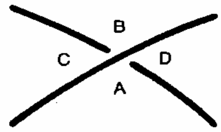


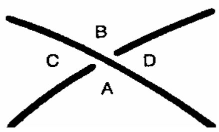
Autour d'un croisement il y a aussi des zones adjacentes entre elles, séparées par une portion d'arc: A/D, D/B, B/C et C/A.

Si l'on nomme ces zones adjacentes, deux possibilés peuvent se présenter qui tiennent compte du passage au-dessus et au-dessous de chacun des arcs.

Alrededor de un cruzamiento hay también zonas adyacentes entre ellas, separadas por una porción de arco: A/D, D/B, B/C y C/A.

Si se nominan las zonas adyacentes pueden presentarse dos posibilidades que tienen en cuenta el pasaje por arriba y por abajo de cada uno de los arcos





C'est une nuance essentielle à maintenir en ce qui concerne le nœud.

Es un matiz esencial a mantener en lo que concierne al nudo.

e) Des trajets autour d'un croisement

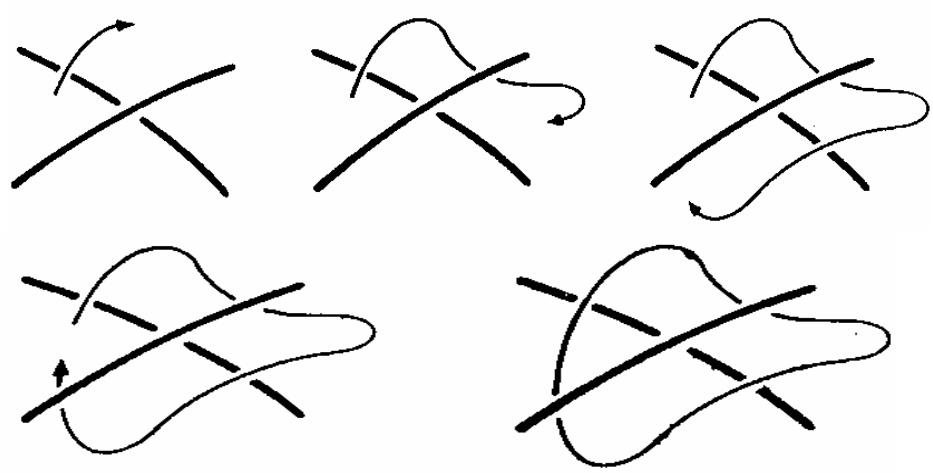
e) Trayectos alrededor de un cruzamiento

Pour traiter des trajets autour d'un nœud, nous allons rapporter ce problème à celui de certains trajets: ceux qui tournent autour de chaque croisement de manière simple et alternée.

Ce sont des trajets qui passent successivement une fois et une seule dans chaque zone adjacente à ce croisement dans l'ordre déterminé par celui du voisinage des zones; c'est-à-dire passant toujours d'une zone, à une autre qui lui est adjacente.

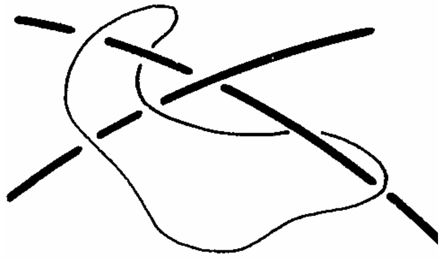
Para tratar trayectos alrededor de un nudo, vamos a relacionar este problema al de ciertos trayectos: los que giran alrededor de cada cruzamiento de manera simple y alternada.

Son trayectos que pasan sucesivamente una y solo una vez por cada zona adyacente a este cruzamiento en el orden determinado por el de la vecindad de las zonas; es decir, pasando siempre de una zona a otra zona que le es adyacente.



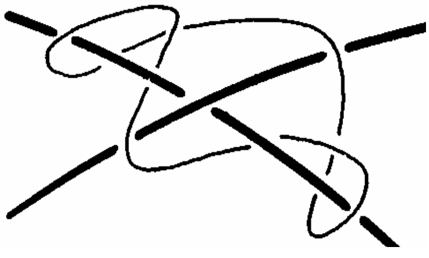
Voici un trajet qui ne tourne pas *autour* d'un croisement:

He aquí un trayecto que no gira ***alrededor*** de un cruce



En voici un qui tourne autour, mais pas de manière simple:

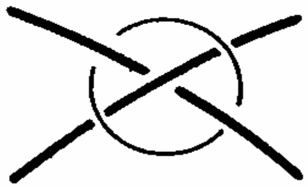
Y aquí , uno que gira alrededor, pero no de manera simple:



Le trajet n'est en effet pas simple, car il tourne aussi autour des arcs. Voici maintenant un trajet simple qui tourne autour d'un croisement:

El trayecto no es en efecto simple pues él también gira alrededor de los arcos .

He aquí ahora un trayecto simple que gira alrededor de un cruzamiento:



Les trajets qui passent autour d'un croisement sont dit simples s'ils passent une fois et une seule dans chaque zone. Ils sont ainsi nécessairement alternés.

Un trajet alterné est un trajet qui passe une fois au-dessus d'un arc, une fois au-dessous du suivant qu'il rencontre dans son parcours, et ainsi de suite jusqu'à ce que le trajet se boucle.

Los trayectos que pasan alrededor de un cruzamiento son llamados simples si pasan una y solo una vez por cada zona. Ellos son así necesariamente alternados.

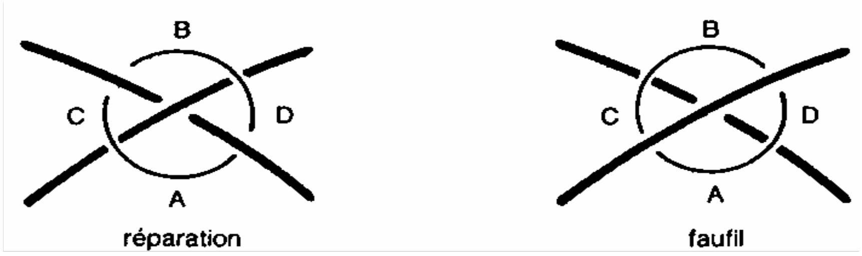
Un trayecto alternado es un trayecto que pasa una vez por arriba de un arco, una vez por debajo del siguiente que encuentra en su recorrido , y así sucesivamente hasta que el trayecto se cierra.

En effet, ayant traversé une zone et ne pouvant plus la retraverser d'après la définition, un trajet simple qui tourne autour d'un croisement doit traverser une zone adjacente à la première et dans le sens contraire de celui qu'il vient d'emprunter par rapport à la traversée du plan de la mise-en-plan.

Pour un croisement dont les zones sont définies par une fonction, autrement dit nommées par une lettre (nous avons vu qu'il y avait deux possibilités), il y a deux types de trajet simple et alterné qui tourne autour.

En efecto, habiendo atravesado una zona y no pudiendo seguirla ,según la definición , un trayecto simple que gira alrededor de un cruzamiento debe atravesar una zona adyacente a la primera y en el sentido contrario de aquel que acaba de tomar, en relación con atravesamiento del plano de la puesta en plano.

Para un cruzamiento cuyas zonas están definidas por una función, o dicho de otra manera nombradas por una letra (hemos visto que había dos posibilidades), hay dos tipos de trayecto simple y alternado que giran alrededor:



reparación hilván

Nous dirons que l'un tient et fait nœud (nous appelons cette situation une réparation), mais l'autre ne tient pas, il glisse –et comme il ne tient pas, tu ne l'auras pas– appelons cette situation *le faufil* (il est neutre de fait, c'est le «tourne autour» de Pierre Soury).

Diremos que uno sostiene y hace nudo (llamamos a esta situación una reparación), pero el otro no sostiene, desliza - y como no sostiene, no lo tendrás - llamamos a esta situación ***el hilván*** (él es neutro de hecho, es el " giro alrededor " de Pierre Soury).

C'est celui que tu n'auras pas, le faufil que nous allons utiliser dans nos calcul, il se prête an une simplification algébrique. Il est inconsistant en topologie.

Es el que "no tendrás" , el hilván, el que vamos a utilizar en nuestros cálculos, se presta a una simplificación algebraica. Es inconsistente en topología.

Par contre, l'un qui tient, dont nous n'avons pas l'usage dans nos calculs, a une fonction topologique de base.

En cambio, el que sostiene, del cual no haremos uso en nuestros cálculos tiene una función topológica de base.

Présentons maintenant la procédure de calcul qui permet de s'orienter dans l'ensemble des différents trajets autour des différents nœuds. Nous appellerons cette procédure un algorithme.

Presentemos ahora el procedimiento de cálculo que permite orientarse en el conjunto de los diferentes trayectos alrededor de los diferentes nudos. Llamaremos a este procedimiento un algoritmo.

Cet algorithme va nous permettre, par un jeu d'écritures, de nommer les zones. Elles seront ainsi marquées par un mot constitué à partir d'un choix de lettres génératrices. Nous obtenons «le groupe fondamental du nœud».

Le lecteur trouvera à la suite quelques remarques et des applications de cet algorithme à des exemples.

Este algoritmo nos permitirá, por un juego de escrituras, nombrar las zonas. Ellas estarán así marcadas por una palabra constituida a partir de una elección de letras generatrices. Obtenemos " **el grupo fundamental del nudo** ".

El lector encontrará a continuación algunas observaciones de este algoritmo y aplicaciones a ejercicios .

2. L'algorithme

La procédure qui permet de nommer chaque zone de la mise à plat d'un nœud est comparable au calcul de la valence des sommets d'un graphe, dans la recherche du caractère eulérien attaché ou non à ce graphe. Le parallélisme entre le problème des ponts de Koenigsberg et notre problème se maintient assez longtemps. Ici, la technique mathématique ne résout qu'imparfaitement le problème posé par les trajets.

2. El algoritmo

El procedimiento que permite nominar cada zona del aplanamiento de un nudo es comparable al cálculo de la valencia de los vértices de un grafo, en la búsqueda del carácter euleriano ligado o no a este grafo. El paralelismo entre el problema de los puentes de Köenigsberg y nuestro problema se mantiene bastante tiempo. Aquí la técnica matemática no resuelve más que imperfectamente el problema planteado por los trayectos.

a) L'algorithme lui-même

1. Un nœud mis à plat. Passer à l'étape 2.
2. Orienter la traversée du plan de la mise à plat. Passer à l'étape 3.
3. Par soucis de commodité, placer l'élément neutre du groupe dans le champ extérieur (non borné). Passer à l'étape 4.

a) El algoritmo mismo

1. Un nudo aplanado . Pasar a la etapa 2
2. Orientar el atravesamiento del plano del aplanamiento . Pasar a la etapa 3
3. Por comodidad , ubicar el elemento neutro del grupo en el campo exterior (no limitado).Pasar a la etapa 4

4. Choisir deux premières zones génératrices autour d'un même croisement adjacent au champ extérieur. Passer à l'étape 5.
5. Effectuer le faufil autour du croisement en question, suivant l'orientation qui traverse la zone à nommer dans le sens négatif. Passer à l'étape 6.
6. Donner son nom à la quatrième zone adjacente à ce croisement en épelant, avec leur sens de traversée du plan, les zones parcourues dans l'ordre du faufil. Passer à l'étape 7.

4. Elegir dos primeras zonas generatrices alrededor de un mismo cruzamiento adyacente al campo exterior. Pasar a la etapa 5
5. Efectuar el hilván alrededor del cruzamiento en cuestión, siguiendo la orientación que atraviesa la zona a nombrar , en sentido negativo: pasar a la etapa 6.

6. Dar su nombre a la cuarta zona adyacente a este cruzamiento deletreando, con su sentido de atravesamiento del plano, las zonas recorridas en el orden del hilván. Pasar a la etapa 7

7. Poursuivre de la même manière (5-6) *a)* pour chaque croisement ayant trois zones déjà nommées. *b)* tant qu'il reste des zones à désigner. Si ces deux conditions ne sont pas remplies, passer à l'étape 8.
8. *a)* S'il n'y a plus de croisement ayant trois zones adjacentes déjà nommées, ajouter, de manière à produire un croisement dont trois zones sont déjà nommées, un générateur nouveau dans une des zones qui reste à désigner. Passer à l'étape 5. *b)* Si toutes les zones sont nommées, passer à l'étape 9.

7. Proseguir de la misma manera (5-6) y a) para cada cruzamiento teniendo tres zonas ya nombradas. b)mientras queden zonas a designar. Si estas dos condiciones no son cumplidas, pasar a la etapa 8
8. a) si no hay más cruzamientos que tengan tres zonas adyacentes ya nominadas, agregar, de manera de producir un cruzamiento del cual tres zonas estén ya nominadas, un generador nuevo en una de las zonas que queda por designar. Pasar a la etapa 5. b) si todas las zonas están nominadas pasar a la etapa 9

9. Lorsque toute les zones sont nommées, il peut rester des croisements autour desquels nous n'avons rien calculé. Nous pouvons donner, grâce à ces croisements, d'autres noms à certaines zones (5-6). Former alors les relations qui sont l'expression de l'égalité algébrique des différents noms d'une même zone, puis passer à l'étape 10.
10. Le calcul s'arrète; l'algorithme est terminé.

9. Cuando todas las zonas estén nombradas pueden quedar cruzamientos alrededor de los cuales no hemos calculado nada podemos dar, gracias a estos cruzamientos, otros nombres a algunas zonas (5-6) .Formar entonces las relaciones que son la expresión de la igualdad algebraica de los diferentes nombres de una misma zona, luego pasar a la etapa 10.
10. El cálculo se detiene; el algoritmo está terminado.

Nous obtenons un groupe présenté par générateurs et relations (voir Annexe du chap. II, p. 45).

Et un dessin du nœud dont chaque zone est marquée de mots articulés entre eux par la structure de ce groupe.

Cette articulation correspond aussi dans l'espace du nœud à des correspondances entre les trajets traversant ces zones (voir chap. III, p. 59).

Obtenemos un grupo presentado por generadores y relaciones (ver anexo del capítulo II, p.45).

Y un dibujo del nudo, del cual cada zona está marcada por palabras articuladas entre ellas por la estructura de este grupo.

Esta articulación corresponde también en el espacio del nudo a correspondencias entre los trayectos que atraviesan esta zona. (ver capítulo III, p.59).

b) Remarques sur les étapes 3 et 4 de l'algorithme

b)Observaciones sobre las etapas 3 y 4 del algoritmo.

Comme nous l'avons déjà vu, une intersection présente quatre zones adjacentes. Il nous faut donc, dans le cas le plus simple, connaitre trois de ces zones adjacentes pour déduire l'expression de la quatrième.

Ceci tient au fait que nous utilisons une des possibilités de trajet autour d'un croisement: celle qui ne tient pas, le faufil.

En ce cas, nous obtenons entre ce trajet et l'élément neutre, une égalité (voir remarque suivante).

Como ya hemos visto, una intersección, presenta cuatro zonas adyacentes . Nos es preciso entonces, en el caso mas simple , conocer tres de esas zonas adyacentes para deducir la expresión de la cuarta .

Esto se debe al hecho que utilizamos una de las posibilidades del trayecto alrededor de un cruzamiento : aquella que no sostiene , el hilván .

En este caso, obtenemos entre este trayecto y el elemento neutro , una igualdad (ver observación siguiente).

Pour des raisons de commodité dans notre algorithme, nous avons nommé la zone extérieure du nœud par un «1»; c'est aussi l'élément neutre du groupe dans une notation multiplicative. (Annexe du chap. II, p.46). Il n'y a besoin alors que de deux générateurs pour commencer le calcul. Ces deux générateurs doivent être adjacents à une même intersection, elle-même adjacente au champ extérieur, pour convenir à ce principe que c'est à partir des noms de trois zones que l'on obtient le nom d'une quatrième.

Por razones de comodidad en nuestro algoritmo, hemos nombrado la zona exterior del nudo con un "1"; es también el elemento neutro del grupo, en una notación multiplicativa (anexo del capítulo II, p.46).No hay necesidad entonces, más que de dos generadores para comenzar él calculo. Estos dos generadores deben ser adyacentes a una misma intersección , ella misma adyacente al campo exterior para convenir a este principio que consiste en que,es partiendo de los nombres de 3 zonas que se obtiene el nombre de una cuarta .

c) Remarques sur les étapes 5 et 6 de l'algorithme

c) Observaciones sobre las etapas 5 y 6 del algoritmo.

Dans l'étape 5, le fait de tourner suivant l'orientation qui fait traverser *la zone à nommer* dans le sens négatif, nous assure que le trajet alterné que nous décrirons alors, commence par l'expression de l'inverse de cette inconnue, soit: x^{-1}.

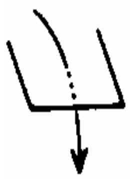
Inconnue d'une équation dont le second membre est l'élément neutre, puisque le trajet alterné ne tient pas. Un faufil est un trajet neutre.

Quelque soient les expressions qu'il rencontre sur son parcours, α, β, γ, le faufil va donner lieu à la formule:

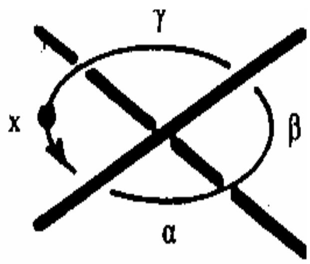
En la etapa 5, el hecho de girar siguiendo la orientación que hace atravesar la zona a nombrar en sentido negativo, nos asegura que el trayecto alternado que describiremos , comience por la expresión de la inversa de esta incógnita ,llamada : X^{-1}

- Incógnita de una ecuación cuyo segundo miembro es el elemento neutro , ya que el trayecto alternado no sostiene . Un hilván es un trayecto neutro .

Cualesquiera sean las expresiones que encuentre en su recorrido, α, β, y γ y γ, el hilván va dar lugar a la fórmula :



$$x^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma = 1$$



L'étape 6 s'éclaire alors, et paraît simple, si on a pris la précaution relative au sens du faufil indiquée à l'étape 5, puisqu'il suffit de résoudre cette équation algébrique dans le groupe, en faisant passer x dans l'autre membre, après avoir changé son signe (voir chap. II), c'est-à-dire:

La etapa 6 se esclarece entonces , y parece simple si se ha tomado la precaución , relativa al sentido del hilván indicada en la etapa 5 , ya que es suficiente resolver esta ecuación algebraica en el grupo, haciendo pasar x al otro miembro después de haber cambiado su signo (ver capítulo II), es decir :

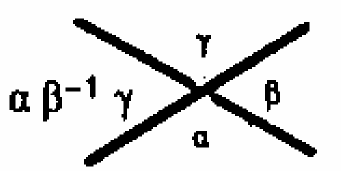
$$\alpha\beta^{-1}\gamma = x$$

La quatrième zone adjacente, dont nous cherchons le nom, s'écrit alors $x = \alpha\beta^{-1}\gamma$, qui est bien la façon d'épeler le parcours du trajet, en suivant les zones, avec leur sens de traversée du nœud. Si nous voulons nommer cette zone, le fautil doit la traverser dans le sens négatif.

La cuarta zona adyacente, cuyo nombre buscamos, se escribe entonces : $x = \alpha\beta^{-1}\gamma$, que es ciertamente la manera de deletrear el recorrido del trayecto , siguiendo las zonas con sus sentidos de atravesamiento del nudo .Si queremos nombrar esta zona , el hilván debe atravesarla en el sentido negativo .

alors α est traversé puis β^{-1} puis γ

ahora α es atravesado **luego β^{-1}** **luego γ**



Il n'y a qu'à épeler ce parcours pour trouver l'expression de la zone recherchée.

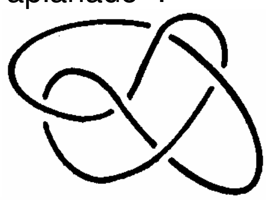
No hay más que deletrear este recorrido para encontrar la expresión de la zona buscada .

d) Prenons un exemple

c) Tomemos un ejemplo .

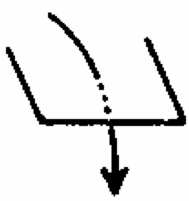
1. Un nœud mis à plat dont voici le dessin:

1. He aquí el dibujo de un nudo aplanado :



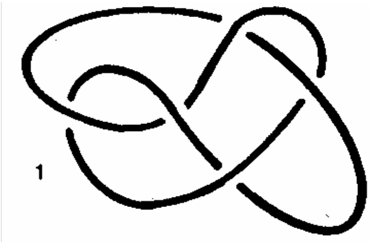
2. Choisissons de noter d'un signe négatif la traversée du plan lorsqu'elle s'effectue du dessus vers le dessous:

2. Elijamos notar con un signo negativo el atravesamiento del plano , cuando él se efectúa de arriba hacia abajo :



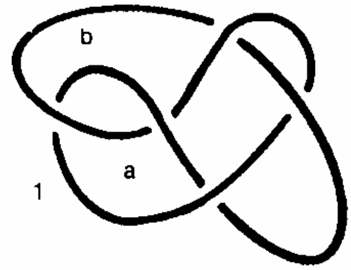
3. Nous plaçons l'élément neutre, noté 1, dans le champ extérieur (non borné) du nœud:

3. Ubiquemos el elemento neutro, notado 1, en el campo exterior (no limitado) del nudo :



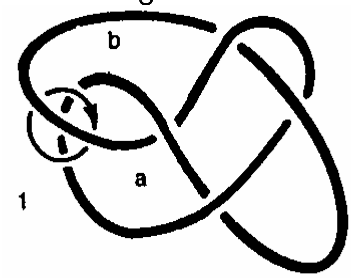
4. Nous plaçons deux lettres a et b dans deux des zones adjacentes au champ extérieur, et de part et d'autre d'un même croisement:

4. Ubicamos dos letras **a** y **b** en dos de las zonas adyacentes al campo exterior , a un lado y otro de un mismo cruzamiento :



5. Plaçons sur notre dessin le faufil autour du croisement déjà pourvu de trois lettres dans trois de ses zones adjacentes. Orientons le ici dans le sens des aiguilles d'une montre afin de répondre à l'exigence qui consiste à lui faire traverser la quatrième zone adjacente en allant du dessus vers le dessous. (Notre sens négatif, décidé à l'étape n.° 2.)

5. Ubiquemos sobre nuestro dibujo el hilván alrededor del cruzamiento ya provisto de tres letras en tres de sus zonas adyacentes . Orientémosle aquí en el sentido de las agujas del reloj a fin de responder a la exigencia que consiste en hacerle atravesar la cuarta zona adyacente yendo de arriba hacia abajo .(nuestro sentido negativo decidido en la etapa n° 2).



6. La quatrième zone va ainsi s'appeler ab. En effet, le faufil nous indique, si nous le suivons dans le sens des flèches qui l'orientent, un passage dans le sens négatif par la zone × cherchée, puis un passage dans le sens positif par la zone a, un passage négatif par la zone 1 et enfin un passage positif par la zone b.

6. La cuarta zona va así a llamarse **ab** . En efecto, el hilván nos indica, si lo seguimos en el sentido de las flechas que lo orientan , un pasaje en sentido negativo por la zona **x** buscada, luego un pasaje en el sentido positivo por la zona **a** , un pasaje negativo por la zona **1** y finalmente un pasaje positivo por la zona **b** .

Soit pour ce trajet neutre:

$$x^{-1}a1^{-1}b = 1$$

Qui se résoud en l'expression:

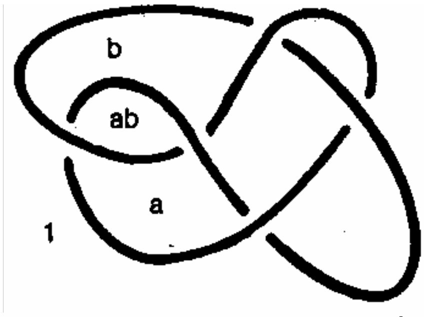
$$x = ab$$

Sea para este trayecto neutro :

$$x^{-1}a1^{-1}b = 1$$

que se resuelve en la expresión :

$$x = ab$$

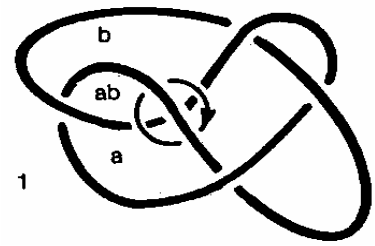


7. Considérons maintenant un autre croisement où le calcul est encore possible avec les lettres dont nous disposons. Celui qui se trouve à droite de la zone que nous venons de nommer s'y prête parfaitement: trois de ses zones adjacentes sont maintenant pourvues d'un nom.

7. Consideremos ahora otro cruzamiento donde el cálculo es aún posible con las letras de las cuales disponemos . Esto se encuentra a la derecha de la zona que acabamos de nombrar y se presta perfectamente a ello : tres de sus zonas adyacentes están ahora provistas de un nombre .

7^5. Sur notre dessin, plaçons le faufil dans ce croisement:

7^5. Sobre nuestro dibujo ubiquemos el hilván en ese cruzamiento:



Nous l'orientons ici encore dans le sens des aiguilles d'une montre. Il traverse bien la zone inconnue dans le sens négatif.

Lo orientamos aquí también en el sentido de las agujas del reloj . Atraviesa ciertamente la zona incógnita en sentido negativo .

7^6. Nous calculons une série de lettres, en suivant le trajet du faufil dans le sens indiqué:

7^6. Calculamos una serie de letras , siguiendo el trayecto del hilván en el sentido indicado :

$$a(ab)^{-1}b$$

C'est le nom de la zone cherchée.

Or, $a(ab)^{-1}b = ab^{-1}a^{-1}b$

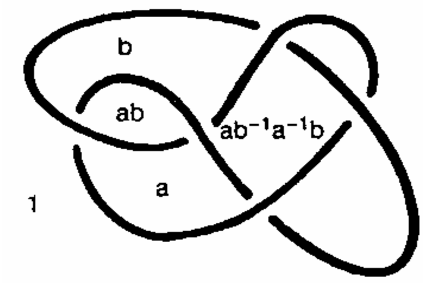
(Pour inverser un mot, voir l'annexe du chapitre II.)

$$a(ab)^{-1}b$$

es el nombre de la zona buscada .
Ahora bien ,

$$a(ab)^{-1}b = ab^{-1}a^{-1}b$$

(Para invertir una palabra , ver el anexo del capítulo II)

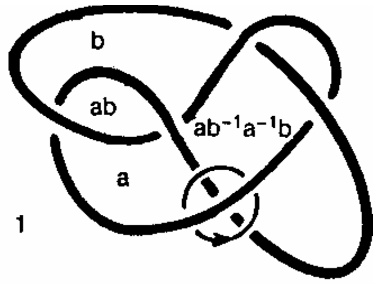


7^{7}. Passons à l'intersection en bas de la zone que nous venons de désigner.

7^{7}. Pasemos a la intersección en la parte baja de la zona que acabamos de designar .

7^{7_5}. Plaçons le faufil:

$7^{7\text{-}5}$ .Ubiquemos el hilván :



Il tourne ici dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

El gira aquí en el sentido contrario a las agujas del reloj .

7^{7_6}. Son parcours se lit alors:

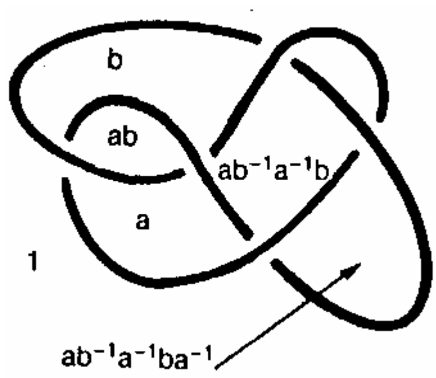
$7^{7\text{-}6}$. Su recorrido se lee entonces : $(ab^{-1}a^{-1}b)a^{-1}1$

$$(ab^{-1}a^{-1}b)a^{-1}1$$

Soit:

$ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}$

mot qui nomme la quatrième zone.



Sea $ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}$

palabra que nombra la cuarta zona (para invertir una palabra , ver anexo del capítulo II)

7^{7^7}. Portons nous au croisement en haut de la zone précédemment nommée:

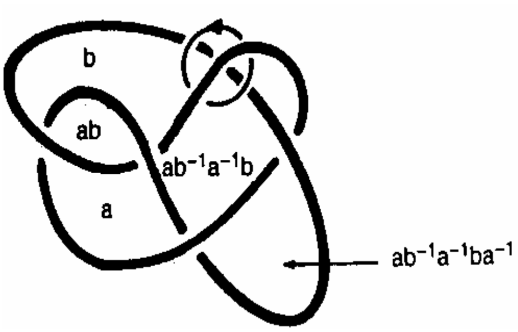
$ab^{-1}a^{-1}b$

$7^{7\text{-}7}$ Llevemos muestro cruzamiento a lo alto de la zona precedentemente nombrada

$$ab^{-1}a^{-1}b$$

$7^{7^{7^{7^5}}}$ Plaçons le faufil orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre:

$7^{7\text{-}7\text{-}7\text{-}5}$ Ubiquemos el hilván orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj



$7^{7^{7^{7^6}}}$. Le parcours le long du faufil nous donne l'expression:

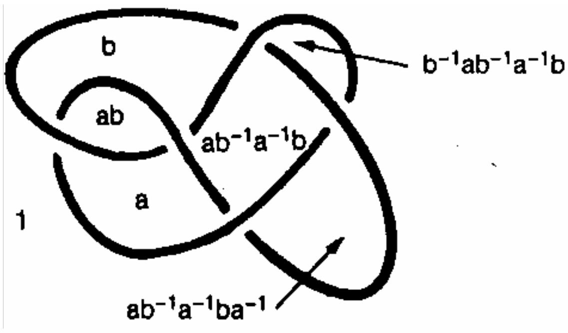
$1b^{-1}(ab^{-1}a^{-1}b)$

$7^{7\text{-}7\text{-}7\text{-}6}$ El recorrido a lo largo del hilván nos da la expresión :

$$1b^{-1}(ab^{-1}a^{-1}b)$$

C'eat le nom de la dernière zone cherchée.

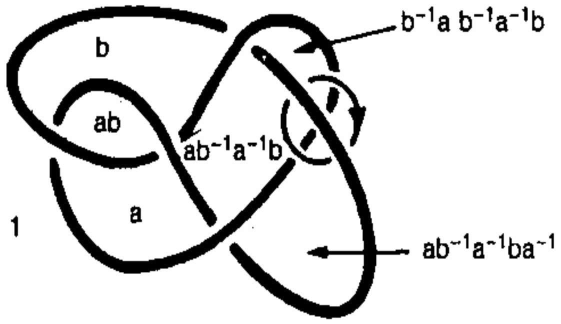
Este es el nombre de la última zona buscada



8. Dans ce cas, le calcul n'a pas été arrêté. Passons à l'étape 9.

9. Il reste un croisement entre les deux dernières zones dont le nom vient d'être calculé. Nous plaçons un faufil à cet endroit:

8. En este caso , el cálculo no se ha detenido .Pasemos a la etapa 9 .
9. Queda un cruzamiento entre las dos últimas zonas cuyo nombre acabamos de calcular .Ubicamos un hilván en este lugar :



Pour donner un deuxième nom à la zone extérieure (non bornée) déjà notée 1, nous orientons ce faufil dans le sens des aiguilles d'une montre. Son parcours nous indique un passage orienté au travers de trois zones:

$$1 = (ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})\,(ab^{-1}a^{-1}b)^{-1}(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Para dar un segundo nombre a la zona exterior (no limitada) ya notada **1** , orientamos este hilván en el sentido de las agujas del reloj .Su recorrido nos indica un pasaje orientado a través de tres zonas :

$$1=(ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})(ab^{-1}a^{-1}b)^{-1}(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Si nous retirons la parenthèse médiane en inversant le mot qu'elle contient:

$$1 = (ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})b^{-1}aba^{-1}(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Puis nous retirons les autres parenthèses:

$$1 = ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}aba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$$

Il n'y a pas de simplification à cette étape du calcul.

Si retiramos el paréntesis del medio invirtiendo la palabra que contiene :

$$1=(ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})(b^{-1}aba^{-1})(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Luego retiramos los otros paréntesis :

$$1=ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}aba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$$

No hay simplificación en esta etapa del calculo .

10. Le calcul s'arrête. Nous avons obtenu le groupe fondamental de ce nœud qui se présente grâce à deux générateurs et une relation dont nous avons réparti les lettres de part et d'autre du signe égal.

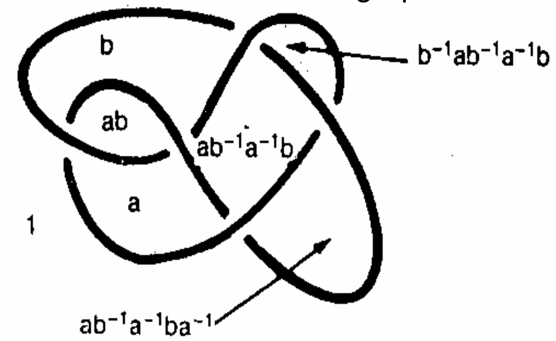
$$G = \{a,b/a^{-1}bab^{-1}aba^{-1} = ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b\}$$

et un dessin de ce nœud dont les zones sont pourvues de mots articulés entre eux par la structure de ce groupe.

10. El cálculo se detiene . Hemos obtenido el grupo fundamental de este nudo que se presenta gracias a dos generadores y una relación cuyas letras hemos repartido de un lado y de otro , del signo igual .

$$G=\{a,b/a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}=ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$$

Y un dibujo de ese nudo cuyas zonas están provistas de palabras articuladas entre ellas por la estructura de este grupo



.

Annexe au chapitre V
Exercises
Anexo al CAPÍTULO v
Ejercicios

Nous pouvons maintenant nous exercer à résoudre quelques problèmes

Podemos ahora ejercitarnos a resolver algunos problemas .

a) Exercices corrigés

Exercice a_1:

a) Ejercicios corregidos :

Ejercicio a_1 :

Calculer le groupe par zones dans la chaîne de Whitehead dont voici une présentation:

Calcular el grupo el grupo por zonas, en la cadena de Whitehead , de la cual he aquí una presentación :

Pour le calcul de ce groupe, il faudra utiliser 2 générateurs. D'autre part, la dernière zone calculée possède 2 appellations.

Para el calculo de este grupo, también será preciso utilizar dos generadores. Por otra parte, la última zona calculada posee dos nombres .

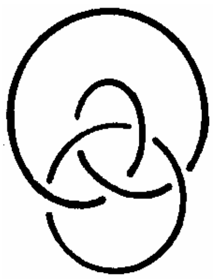
Corrigé:

1. La chaine de Whitehead mise à plat:

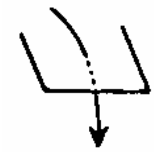
2. Orientation de la traversée du plan:

Corrección :

1. La cadena de Whitehead puesta a plat

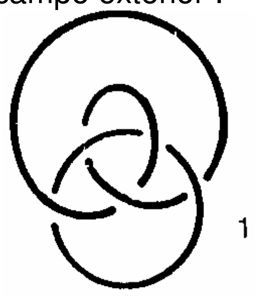


2. Orientación del atravesamiento del plano :



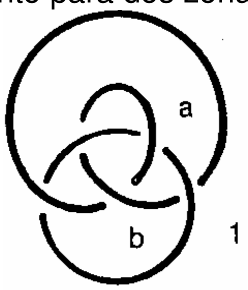
3. L'élément neutre dans le champ extérieur:

3. El elemento neutro en el campo exterior :



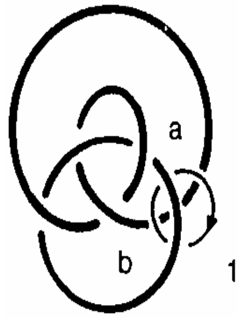
4. Deux lettres d'engendrement pour deux zones:

4. Dos letras de engendramiento para dos zonas :



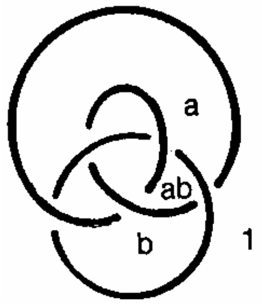
5. Le premier faufil convenablement orienté autour d'un croisement:

5. El primer hilván convenientemente orientado alrededor de un cruzamiento



6. La quatrième zone est nommée ab:

6. La cuarta zona es nombrada **ab**

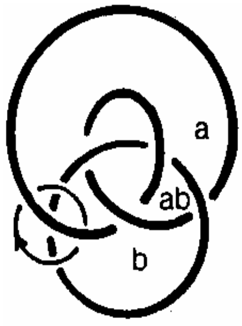


7. Considérons un au·re croisement.

7. Consideremos otro cruzamiento

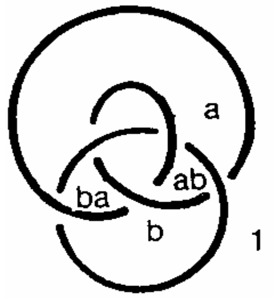
7^5. Le faufil orienté autour de ce croisement:

$7^{5.}$ El hilván orientado alrededor de este cruzamiento :



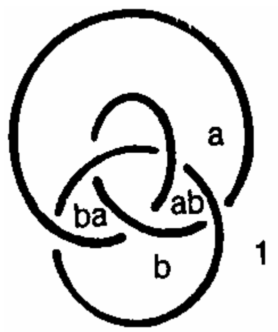
7^6. Une nouvelle zone est désignée ba.

7^6. Una nueva zona es designada **ba**



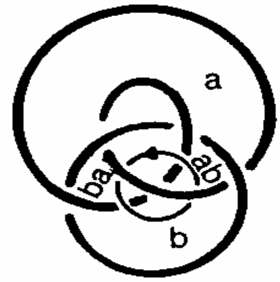
7^7. Encore un croisement.

7^7 Aún un cruzamiento



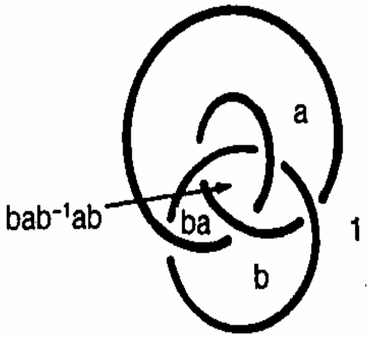
7^{7^5}. Avec un faufil orienté:

$7^{7\text{-}5}$:Con un hilván orientado :



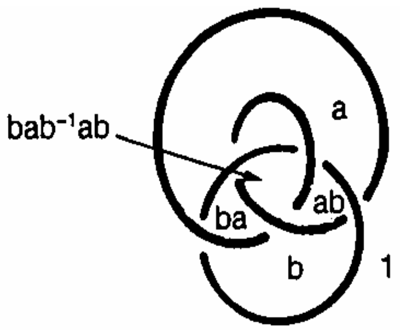
7^{7^6}. La zone centrale s'appelle $bab^{-1}ab$:

$7^{7\text{-}6}$ La zona central se llama $bab^{-1}ab$:



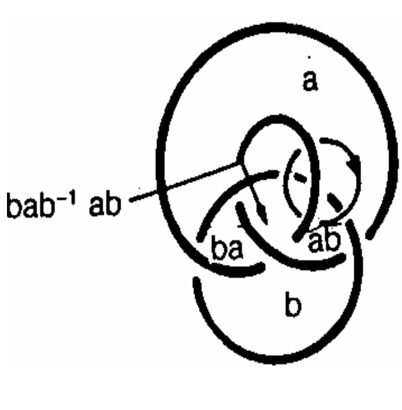
7^{7^7}. Encore un croisement:

$7^{7\text{-}7}$. Aún un cruzamiento:



$7^{7^{7^5}}$. Avec le faufil orienté:

$7^{7\text{-}7\text{-}5}$: Con el hilván orientado

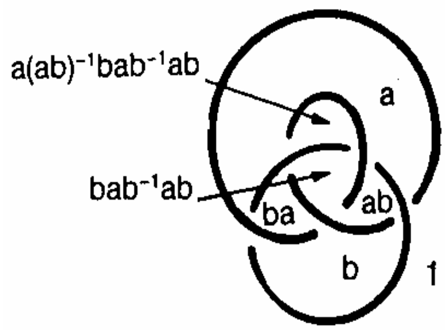


$7^{7^{7^{6}}}$. La deniere zone est nommée

$a\,(ab)^{-1}bab^{-1}ab = ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$

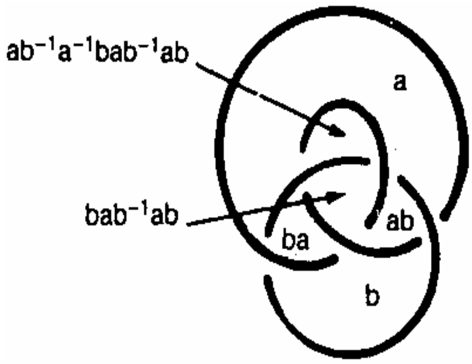
$7^{7\text{-}7\text{-}6}$ La ultima zona es nominada :

$$a(ab)^{-1}bab^{-1}ab = ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$$



8. Le calcul s'arrête, toutes les zones sont nommées. On passe donc à l'étape 9.

8. El cálculo se detiene. Todas las zonas están nominadas. Se pasa entonces a la etapa 9.



9. Il reste un croisement qui n'a pas été utilisé.

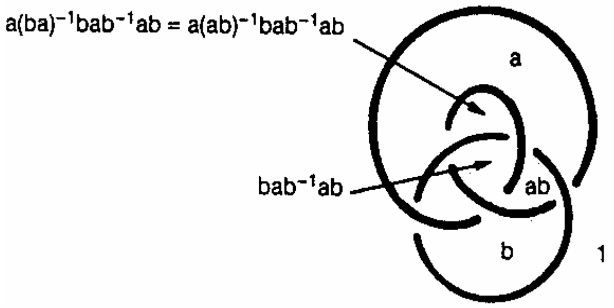
9. Queda un cruzamiento que no ha sido utilizado

9^5

9^6. Cela donne une seconde appellation à la dernière zone calculée:

9^6. Esto da una segunda nominación a la última zona calculada:

$$a(ba)^{-1}bab^{-1}ab=ba^{-1}b^{-1}bab^{-1}ab$$



10. Le calcul s'arrête. Le groupe de ce nœud a deux génerateurs et une relation:

10 .El cálculo se detiene . El grupo de este nudo tiene dos generadores y una relación:

$$G=\{a,b/ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab=bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a\}$$ [1]

Exercice a_2:

Calculer le groupe par zone de la chaîne Borroméenne mise à plat:
Ce calcul nécessitera l'utilisation de trois générateurs.

Ejercicio a_2:

Calcular el grupo por zona de la cadena Borromeana aplanada Este cálculo necesitará la utilización de tres generadores.

---

[1] Para aquello lectores que conocen el cálculo de los grupos, señalemos que los miembros de esta relación son palabras simétricas en espejo. Un cálculo algebraico simple permite formularla a partir de la relación deducida: pasar ,a ,desde el principio del primer miembro al principio del segundo invirtiendo su signo:

$$b^{-1}a^{-1}\ bab^{-1}ab\ = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a$$

pasar a del final del segundo miembro al final del primero invirtiendo su signo:

$$b^{-1}a^{-1}\ bab^{-1}ab\ a^{-1} = a^{-1}\ bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$$

El lector puede constatar que al nombrar $U = a^{-1}\ bab^{-1}ab\ a^{-1}$, esta relación se escribe: $b^{-1}U = U\ b^{-1}$ Si nosotros tenemos el cuidado de plantear $\alpha = U$ y $\beta = b$
El grupo puede ser expresado por :

$$G = \{\ \alpha\beta\ /\ \beta^{-1}\alpha = \alpha\beta^{-1}\ \}$$

1. Pour ceux des lecteurs qui connaissent le calcul des groupes, remarquons que les membres de cette relation sont des mots symétriques en miroir. Un calcul algébrique simple permet de la formuler à partir de la relation déduite: passer a du début du premier membre au début du deuxième en inversant son signe:

$$b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a$$

passer a de la fin du second membre à la fin du premier en inversant son signe:

$$b^{-1}a^{-1}bab^{-1}aba^{-1} = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$$

Le lecteur peut constater qu'à nommer $U = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}$, cette relation s'écrit: $b^{-1}U = Ub^{-1}$. Si nous prenons le soin de poser $\alpha = U$ et $\beta = b$
Le group peut être exprimé par:

$$G = \{\alpha\beta\ /\ \beta^{-1}\alpha = \alpha\beta^{-1}\}$$

Corrigé:

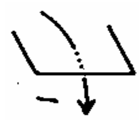
1. **La chaine Borroméenne dans sa présentation à plat:**

Corrección :

1. La cadena borromea en su presentación aplanada :

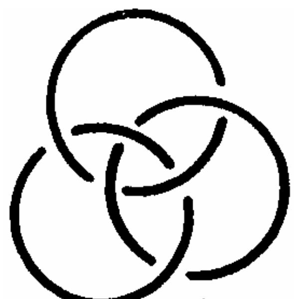
2. **La traversée du plan:**

2. El atravesamiento del plano :



3. L'élément neutre: 1.

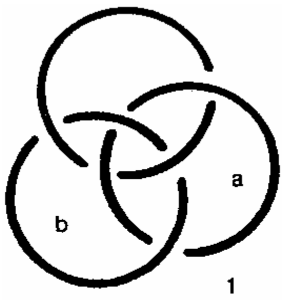
3. El elemento neutro : 1



1

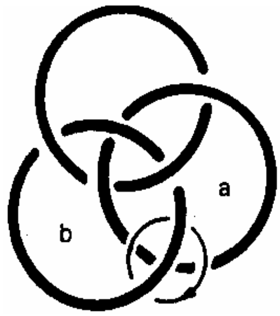
4. Deux générateurs:

4. Dos generadores



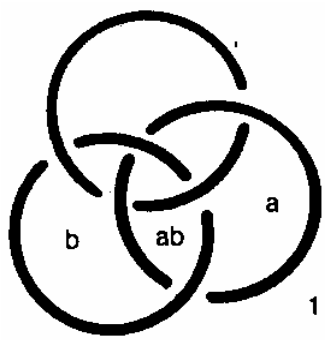
5. Le faufil orienté:

5: El hilván orientado



6. La quatrième zone est nommée ab:

6. La cuarta zona es nombrada **ab**:

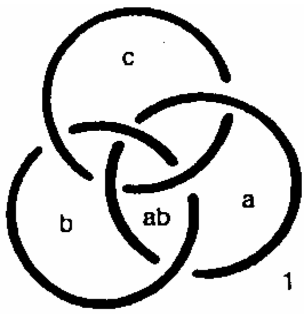


7. Il n'est pas possible de poursuivre ainsi, chacun des croisements n'ayant pas été utilisé ne comporte pas trois zones adjacentes déjà nommées. Passons à l'étape 8.

7. No es posible proseguir así : cada uno de los cruzamientos, que no han sido utilizados, no comporta tres zonas adyacentes ya nominadas. Pasemos a la etapa 8

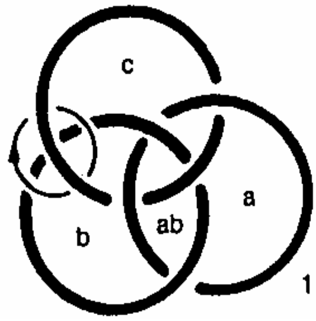
8a. Le calcul étant arrêté, ajoutons un générateur, la lettre c. Puis passons en 5.

8ª Habiéndose detenido el cálculo ,agreguemos un generador, **c**. Luego pasemos a 5



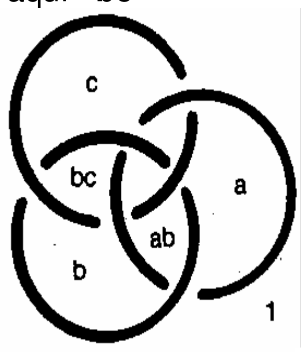
8⁵. Le faufil orienté en un nouveau croisement:

8^5. El hilván orientado en un nuevo cruzamiento.



8⁶. Cette zone se nomme ici bc:

8^6 Esta zona se nomina aquí **bc**

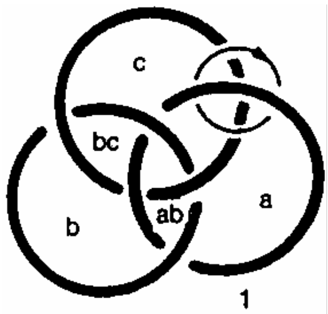


8⁷. Prenons un autre croisement.

8^7 Tomemos otro cruzamiento

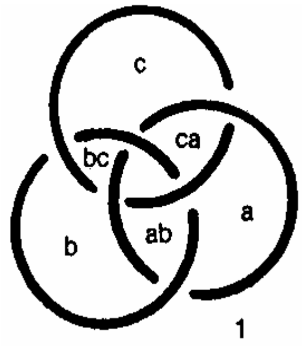
8^{7^5}. Un faufil orienté:

$8.^{7\text{-}5}$Un hilván orientado.



8^{7^6}. Cette zone s'appelle ca:

$8.^{7\text{-}6}$ Esta zona se llama **ca**:

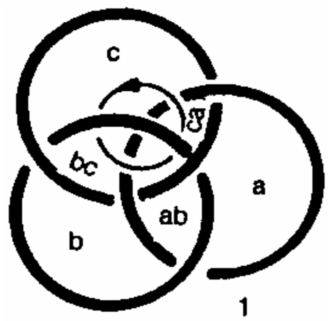


8^{7^7}. Encore un dernier croisement.

$8^{7^{7^5}}$. Un faufil orienté:

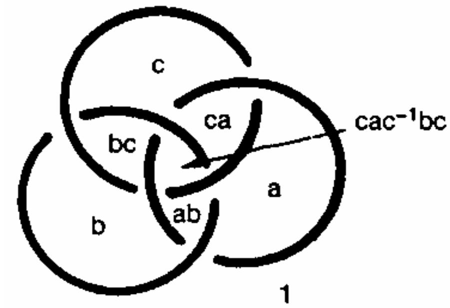
$8.^{7-7}$ Aún un ultimo cruzamiento

8^{775} Un hilván orientado:



$8^{7^{7^6}}$. La zone centrale s'appelle alors $cac^{-1}bc$. C'est son premier nom.

8.776. La zona central se llama entonces: $cac^{-1}bc$. Es un primer nombre

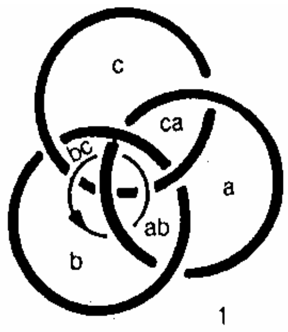


8^b. Le calcul s'arrête; toutes les zones sont nommées. Passons à l'etape 9.

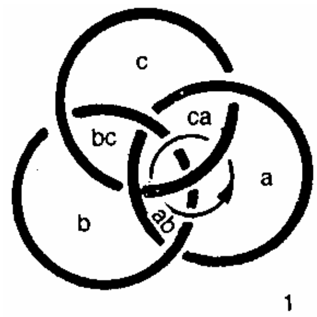
8 b. El cálculo se detiene; todas las zonas están nominadas Pasemos a la etapa 9.

9. Il reste deux croisements qui n'ont pas été utilisés. Ils donnent lieu á deux relations qui s'établissent de l'égalité des noms de la zone centrale.

9. Quedan dos cruzamientos que no han sido utilizados. Ellos dan lugar a dos relaciones ,que se establecen a partir de la igualdad de los nombres de la zona central



$cac^{-1}bc = bcb^{-1}ab$



$cac^{-1}bc = aba^{-1}ca$

$$cac^{-1}bc = bcb^{-1}ab \qquad cac^{-1}bc = aba^{-1}ca$$

10. Le calcul s'arrête. Le groupe de ce nœud à trois générateurs et deux relations:

$$G = \{a, b, c / aba^{-1}ca = bcb^{-1}ab = cac^{-1}ba\}$$

10. El cálculo se detiene. El grupo de este nudo tiene tres generadores y dos relaciones.

$$G = \{a, b, c / aba^{-1}ca = bcb^{-1}ab = cac^{-1}bc\}$$

b) *Trajets autour de nœuds.*

b) Trayectos alrededor de nudos.

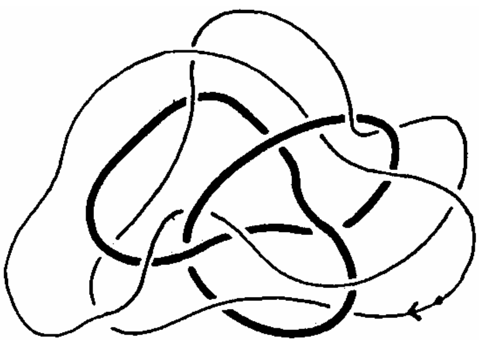
Exercice b_1

Ejercicio b_1

Un trajet autour du nœud trèfle. Donner l'expression du trajet qui parcourt l'espace autour du nœud trèfle dans le dessin suivant:

Il s'agit de l'exprimer à partir du point marqué dans la zone extérieure, en suivant le sens indiqué.

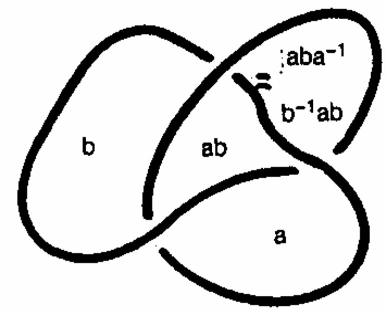
Un trayecto alrededor del nudo trébol. Dar la expresión del trayecto que recorre el espacio alrededor del nudo trébol en el dibujo siguiente:
Se trata de expresarlo a partir del punto marcado en la zona exterior, siguiendo el sentido indicado.

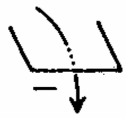


Indications: Pour trouver l'expression de ce trajet, il faut auparavent calculer les noms des zones définies par la mise à plat du nœud trèfle. Donnons ici le résultat de ce calcul:

$$G = \{a,b/aba^{-1} = b^{-1}ab\}$$

Indicaciones : para encontrar la expresión de este trayecto, es preciso desde ahora calcular los nombres de las zonas definidas por el aplanamiento del nudo trébol. Damos aquí el resultado de este cálculo:





$$G = \{a,b \,/\, aba^{-1} = b^{-1}ab\}$$

Ces dénominations dépendent du choix que nous avons fait des zones génératrices. Il faut savoir que nous sommes partis des deux zones a et b avec la convention de sens qui accompagne le dessin.

Estas denominaciones dependen de la elección que hayamos hecho de las zonas generatrices. Es necesario saber que hemos partido de las dos zonas ,a y b, con la convención de sentido que acompaña el dibujo.

Calculons le trajet en question en partant du point tracé, et en le parcourant dans le sens de la flèche (d'autres conventions donnent d'autres résultats, dont l'équivalence est assurée par des permutations).

Dans ces conditions ce trajet s'écrit avec des parenthèses qui indiquent momentanément les passages de chaques zones traversées:

$$(a)(b)(b^{-1}ab)^{-1}(ab)^{-1}(b)(b^{-1}ab)$$

Calculemos el trayecto en cuestión partiendo del punto trazado y recorriéndolo en el sentido de la flecha (otras convenciones dan otros resultados, cuya equivalencia está asegurada por permutaciones).

En estas condiciones este trayecto se escribe con paréntesis que indican momentáneamente los pasajes de cada zona atravesada:

$$(a)(b)(b^{-1}ab)^{-1}(ab)^{-1}(b)(b^{-1}ab)$$

Par suppression des parenthèses nous obtenons le resultat suivant:

$$abb^{-1}a^{-1}bb^{-1}a^{-1}bb^{-1}ab$$

que nous pouvons simplifier ainsi:

$$(a(bb^{-1})a^{-1})(bb^{-1})(a^{-1}(bb^{-1})a)b = b$$

Por supresión de paréntesis obtenemos el resultado siguiente:

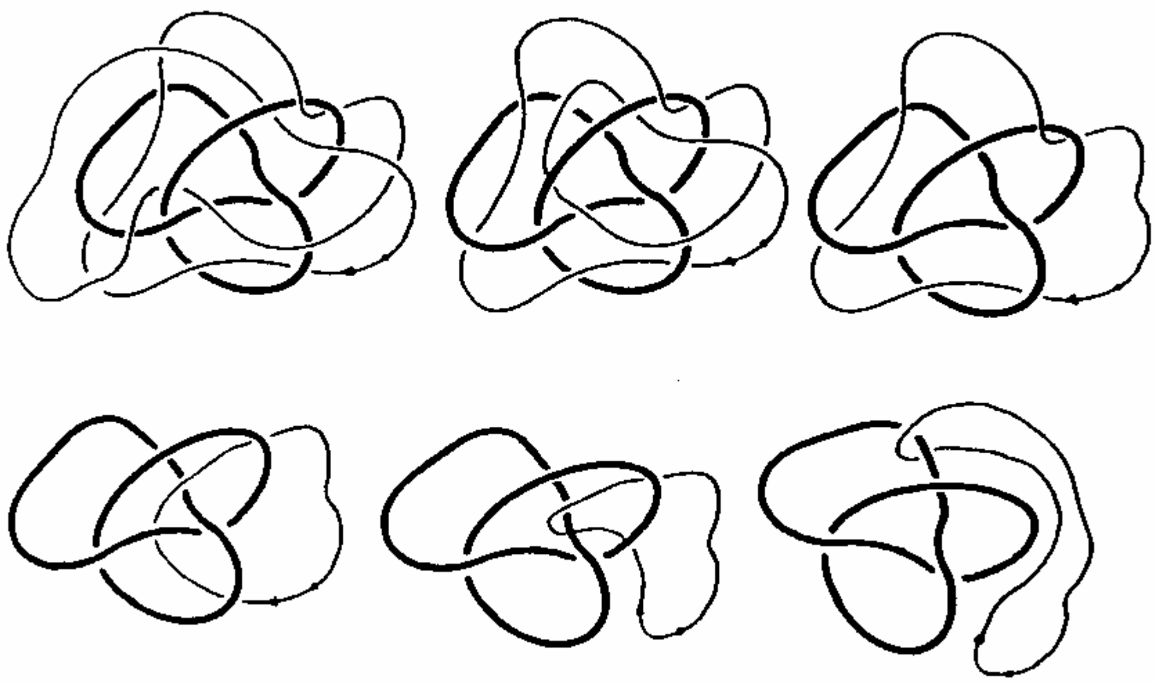
$$abb^{-1}a^{-1}bb^{-1}a^{-1}bb^{-1}ab$$

que podemos simplificar así :

$$(a(bb^{-1})a^{-1})(bb^{-1})(a^{-1}(bb^{-1})a)b = b$$

Voici le changement de présentation du lacet explorant l'espace complémentaire du nœud de trèfle, afin de vérifier le résultat obtenu.

He aquí el cambio de presentación del lazo explorando el espacio complementario del nudo trébol, a fin de verificar el resultado obtenido



Or nous pouvons voir que le lacet passe par la zone b.

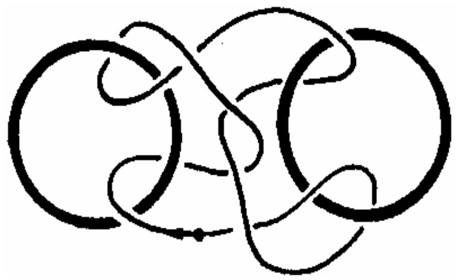
Ahora , podemos ver que el lazo pasa por la zona b.

Exercice b_2:

Un trajet autour de deux ronds libres: Formuler l'expression du trajet qui parcourt l'espace autour de deux ronds indépendants dans le dessin suivant:

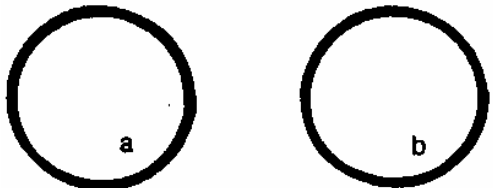
Ejercicio b_2:

Un trayecto alrededor de dos redondeles libres: Formular la expresión del trayecto que recorre el espacio alrededor de dos redondeles independientes en el dibujo siguiente:



Indications: Il faut traiter d'abord le calcul des zones. Ici il se réduit à donner les deux générateurs du groupe, chacun dans un rond.

Indicaciones : es preciso ,tratar en primer lugar el cálculo de las zonas. Aquí se reduce a dar los dos generadores del grupo, cada uno en un redondel.



A suivre le parcours du trajet présenté dans cet exercice, nous obtenons le résultat suivant les zones traversées:

$$(a)(a)^{-1}(b)(b)^{-1}$$

Al seguir el recorrido del trayecto presentado en este ejercicio, siguiendo las zonas atravesadas , obtenemos el resultado:

$$(a)^{-1}(a)(b)^{-1}(b)$$

Nous retirons les parenthèses...

$$aa^{-1}bb^{-1}$$

Retiramos los paréntesis:

$$a^{-1}ab^{-1}b$$

..y simplificamos:

$$(aa^{-1})(bb^{-1})=1$$

Remarque sur la portée de ces calculs: leur imperfection entraîne une suite. Le lecteur constate que ce trajet est neutre, or il semble tenir dans un modèle physique de la chaîne ainsi réalisable de deux ronds et d'un troisième. En effet, cette chaîne est consistante, et cela peut être vérifié par une construction. Il nous faut rendre compte de notre résultat qui peut paraître alors paradoxal.

Observación sobre el alcance de estos cálculos: su imperfección entraña una consecuencia . El lector constata que este trayecto es neutro; sin embargo parece sostenerse en un modelo físico de la cadena , así realizable ,de dos redondeles y por un tercero. En efecto, esta cadena es consistente y esto puede ser verificado por una construcción. Es necesario dar cuenta de este resultado que puede parecer paradojal.

Le fait s'explique si nous ajoutons la définition d'une opération spécifique pour le groupe fondamental. Les calculs que nous effectuons sont vrais à *homotopie* près.

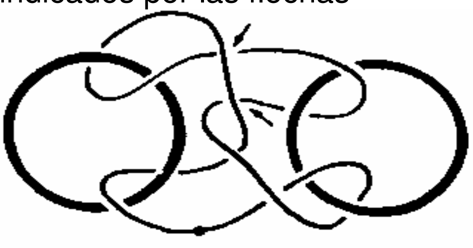
El hecho se explica si agregamos la definición de una operación específica para el grupo fundamental. Los cálculos que efectuamos son verdaderos en congruencia módulo homotopía.

C'est dire que les trajets, mais non pas les ronds qui font nœuds, peuvent se traverser eux-mêmes. C'est la première et essentielle faiblesse de cette technique qui fait qu'elle ne rend pas compte, en une théorie des nœuds achevée, de la structure nodale. Sa conséquence se retrouve ailleurs, du fait que des nœuds différents puissent avoir même groupe fondamental, par exemple.

Es decir que los trayectos pero no los redondeles que hacen nudos pueden atravesarse a sí mismos. Es la primera y esencial debilidad de esta técnica que, en una teoría de nudos , acabada, ella no da cuenta, de la estructura nodal. Su consecuencia se aprecia en el hecho de que nudos diferentes pueden tener el mismo grupo fundamental por ejemplo. Entonces su consecuencia se encuentra por lo demás, del hecho que nudos diferentes puedan tener el mismo grupo fundamental por ejemplo.

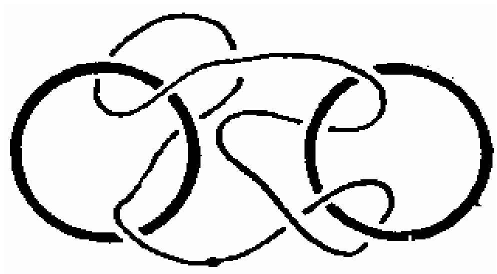
Effectuons tout d'abord deux homotopies à la hauteur des dessus-dessous indiqués par des fléches.

Efectuemos, primeramente, dos homotopías a la altura de los arriba –abajo indicados por las flechas



Nous pouvons alors dégager la boucle.

Podemos ahora deshacer el bucle

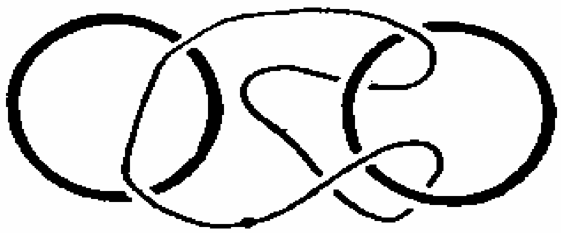


Puis, effectuons de même
une troisième homotopie.

Efectuamos una tercer homotopía

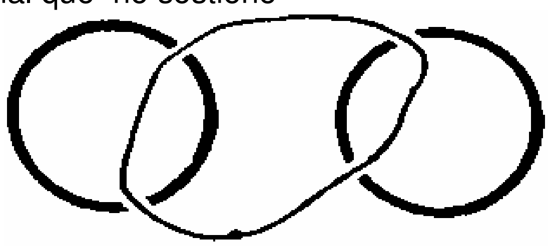
Cela permet de défaire
l'autre boucle passant
dans le second rond.

Esto permite deshacer el otro bucle pasando por el segundo redondel



Nous avons un trajet
trivial, qui ne tient pas.

Tenemos un trayecto trivial que no sostiene

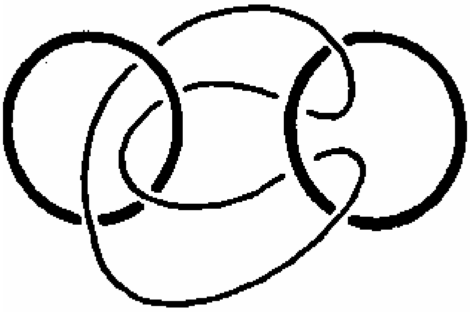


Exercice b_3:

Un autre trajet autour de deux ronds libres (la chaîne boroméenne). Donner l'expression du trajet suivant lorsqu'il parcourt l'espace autour de deux ronds libres.

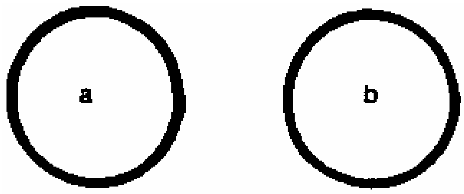
Ejercicio b_3:

Otro trayecto alrededor de dos redondeles libres (la cadena borromea). Dar la expresión del trayecto siguiente en el caso en que recorre el espacio alrededor de dos redondeles libres.



Indications: Le calcul des zones est très simple comme dans le cas précédent, il suffit de mettre une lettre génératrice dans chacun des ronds.

Indicaciones : el cálculo de las zonas es muy simple como en el caso precedente; basta poner una letra generadora en cada uno de los redondeles



L'expression de ce trajet s'ecrit:

$$ab^{-1}a^{-1}b$$

La expresión de este trayecto se escribe:

$$ab^{-1}a^{-1}b$$

Cette forme caractéristique d'un mot du groupe fondamental qui consiste en deux termes suivis de l'inverse du premier, suivis de l'inverse du second s'appelle un commutateur (voir conclusion page 127).

Esta forma característica de una palabra del grupo fundamental que consiste en dos términos seguidos del inverso del primero, seguidos del inverso del segundo, se llama un conmutador. (ver conclusión página 127).

A considerer un changement de présentation qui préserve le même nœud, formé de ces deux ronds et du trajet, nous pouvons remarquer que l'un de ces ronds parcourt l'espace des yeux autres ronds (le trajet et l'autre rond) selon le même parcours que celui du trajet calculé dans cet exercice.

Al considerar un cambio de presentación que preserve el mismo nudo, formado por estos dos redondeles y el trayecto, podemos observar que uno de estos redondeles recorre el espacio de los otros dos redondeles (el trayecto y el otro redondel) según el mismo recorrido que el del trayecto calculado en este ejercicio.

Il aura donc comme expression un commutateur.

Dans cette chaîne, les ronds sont interchangeables. Le calcul de cet exercice et cette homogénéité des ronds permettent de conclure que la chaîne de la famille des boromées, dont il s'agit ici, a bien la propriété qui consiste à se trivialiser (deux ronds libres), lorsqu'on retire un quelconque des trois.

Él tendrá entonces como expresión un conmutador.

En esta cadena los redondeles son intercambiables. El calculo de este ejercicio y esta homogeneidad de los redondeles permiten concluir que la cadena de la familia de los borromeos, de la cual se trata aquí , tiene la propiedad que consiste en trivializarse (quedan dos redondeles libres), cuando se retira uno cualquiera de los tres.

En effet, dans un commutateur, si on retire une des deux lettres génératrices, il reste l'autre et son inverse, donc l'élément neutre. Nous pouvons dire alors, que le trajet est neutre par rapport à un seul des ronds, que le rond de ce trajet et le rond restant sont libres ou indépendants l'un de l'autre.

Mais ceci n'assure pas du caractère non neutralisable à homotopie près, comme nous allons le voir dans les exercises suivants. Par contre, nous sommes certains qu'une seule homotopie ne peut pas défaire cette chaîne.

En efecto, en un conmutador, si se retira una de las dos letras generatrices, queda la otra y su inversa, por lo tanto el elemento neutro.

Podemos decir entonces que el trayecto es neutro en relación a uno solo de los redondeles, que el redondel de este trayecto y el redondel restante son libres o están independientes uno del otro.

Pero esto no asegura el carácter no neutralizable teniendo en cuenta la congruencia en módulo homotopía , como veremos en los ejercicios siguientes.

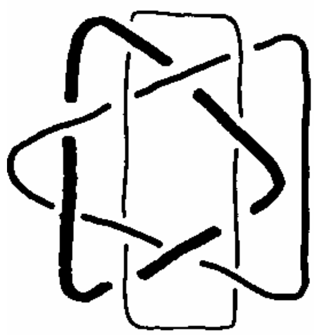
En cambio, estamos seguros que una sola homotopía no pueda deshacer esta cadena.

Exercice b_4:

Ejercicio b_4:

Un trajet dans deux triangles emboîtés.

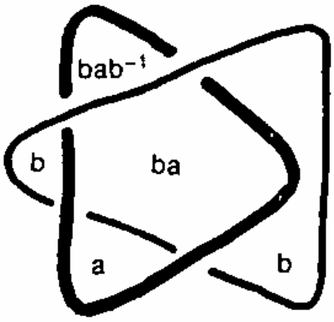
Un trayecto en dos triángulos encajados

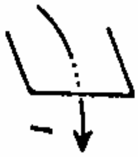


Indications: Donnons le résultat obtenu grâce à l'algorithme de la nomination des zones.

Ind

icaciones : Damos el resultado obtenido gracias al algoritmo de la nominación de zonas:





L'expression du trajet demandé, en partant du haut du dessin, dans le sens des aiguilles d'une montre, s'écrit:

$$b^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$
soit: $ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$

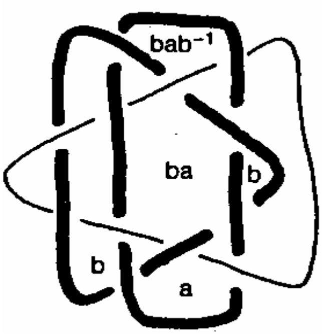
La expresión del trayecto pedido, partiendo de lo alto del dibujo en el sentido de las agujas del reloj se escribe:

$$b^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$

O sea $ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$

La chaîne, constituée de ces deux triangles et de ce trajet a la propriété borroméenne. Le lecteur peut le vérifier grâce à ce calcul, et à condition de calculer un des deux triangles comme un trajet autour des deux autres composants de cette chaîne, dans le dessin suivant, par exemple.

La cadena constituida por estos dos triángulos y este trayecto tiene la propiedad borromea. El lector puede verificarla gracias a este cálculo y a condición de calcular uno de los dos triángulos como un trayecto alrededor de los otros dos componentes de esta cadena en el dibujo siguiente por ejemplo.

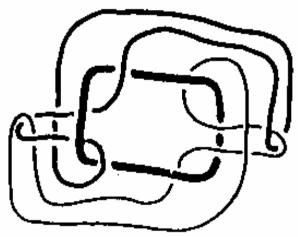


$a^{-1}bab^{-1}b^{-1}baba^{-1}b^{-1}$
soit:
$a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$

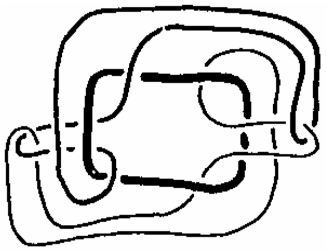
$$a^{-1}bab^{-1}b^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$
$$a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$$

Estos resultados como en el caso de la cadena de la familia de las borromeas (ver ejercicio b_3), muestra que esta cadena no es neutralizable por una sola homotopía (ver ejercicio b_2)

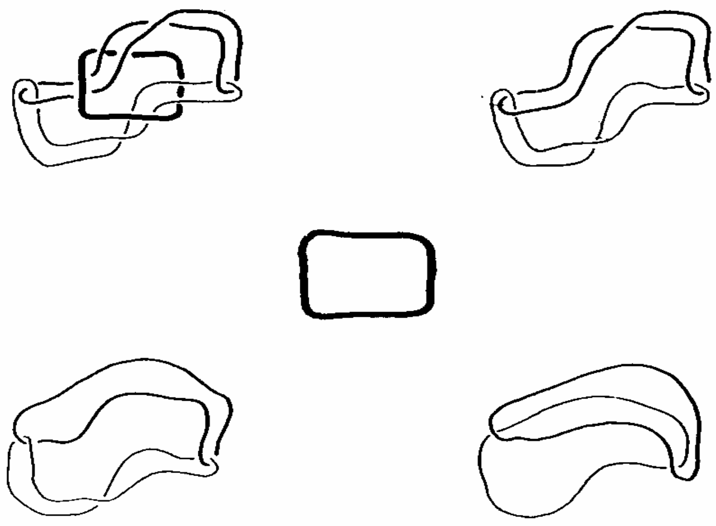
Par contre, celle-ci est neutre, moyennant deux homotopies, réparties sur deux ronds différents, dans la présentation suivante:
En cambio esta es neutra, por medio de dos homotopías repartidas sobre dos redondeles diferentes, en la presentación siguiente:



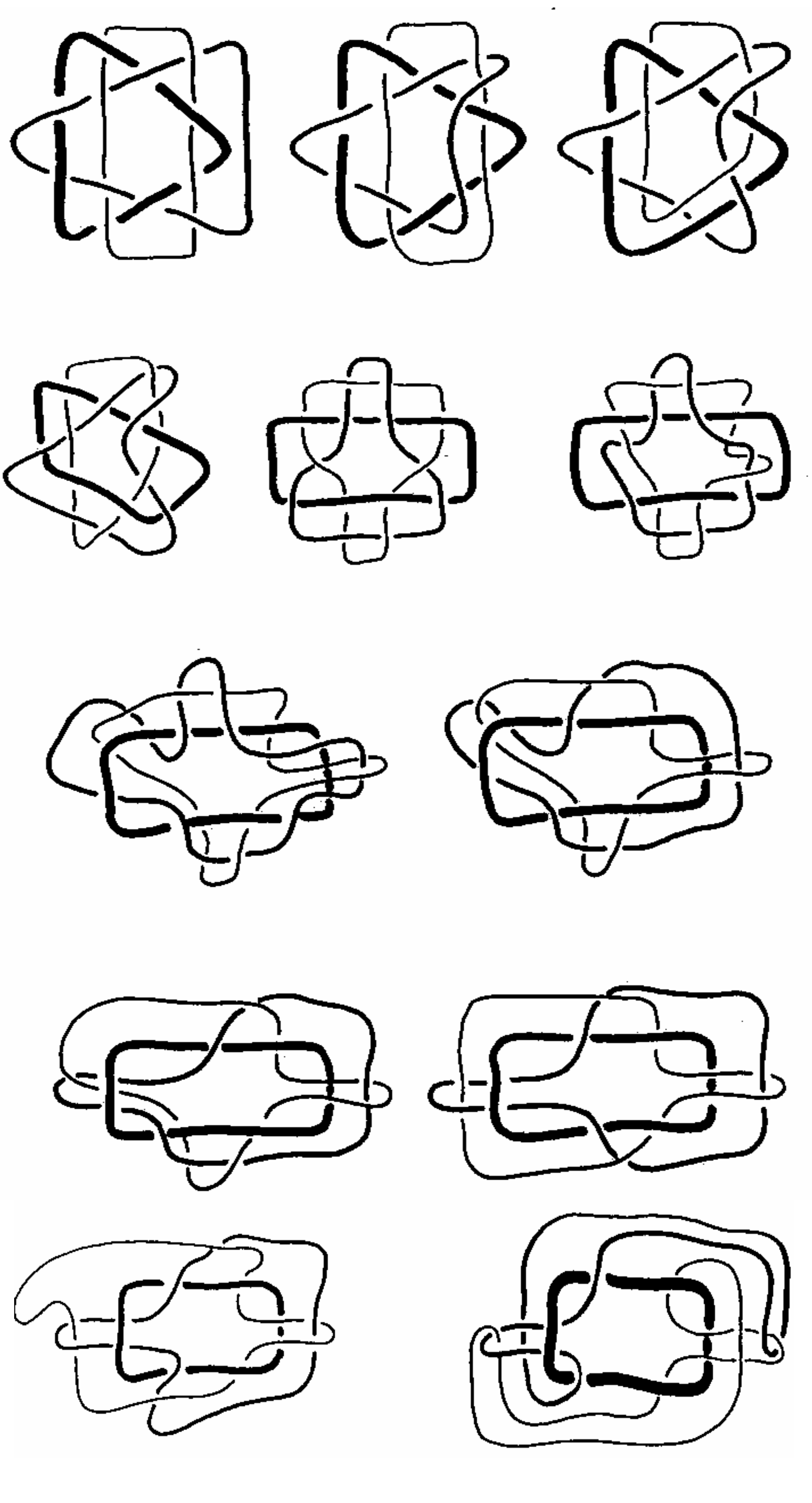
Par deux homotopies en quatre croisements:
Por dos homotopías en cuatro cruzamientos:



Cette chaîne se défait, elle est neutre.
Esta cadena se deshace; ella es neutra.



Le changement de présentation qui va de la situation énoncée dans cet exercice à celle qui se prête aux homotopies est délicat, nous le donnons ici.
El cambio de presentación que va de la situación enunciada en este ejercicio a la que se presta a las homotopías, es delicado. Nosotros lo damos aquí:



Ce contre-exemple confirme que nous ne sommes pas assurés, par ces calculs, de ne pouvoir défaire les chaînes, moyennant plusieurs homotopies, effectuées successivement sur des ronds différents. (Contre-exemple dû à P. Soury.)

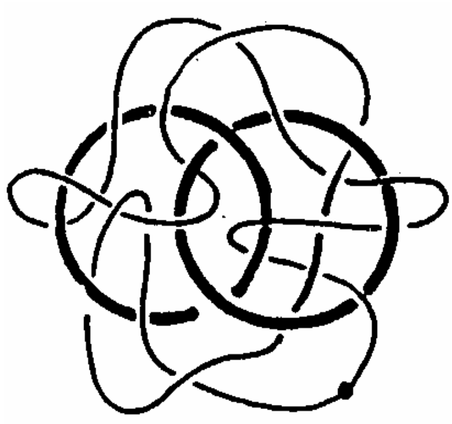
Este contraejemplo confirma que no estamos seguros por estos cálculos de poder deshacer las cadenas mediante varias homotopías, efectuadas sucesivamente sobre redondeles diferentes. (Contraejemplo debido a P. Soury).

Exercice b_5:

Ejercicio b_5:

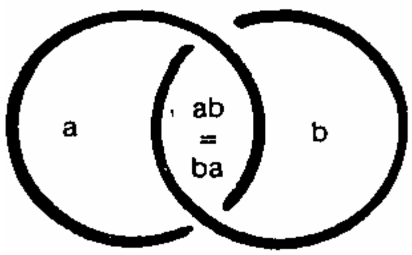
Un trajet autour de l'enlacement: Rechercher l'expression du trajet suivant autour de l'enlacement.

Un trayecto alrededor del enlace: Buscar la expresión del trayecto siguiente alrededor del enlace.



Indications: Calculons les expressions des zones délimitées par la mise à plat de l'enlacement. Voici la solution:

Indicaciones: Calculemos las expresiones de las zonas delimitadas por el aplanamiento del enlace. He aquí la solución:



Comme dans l'exercice précédent nous pouvons alors formuler le mot du groupe de cette chaîne correspondant au trajet proposé, ici en l'épelant à partir d'un point à droite en bas (voir figures suivantes).

$$(a^{-1})(a^{-1})(ab)(a)(b)(b^{-1}a^{-1})(b)$$

Como en el ejercicio precedente podemos entonces formular la palabra del grupo de esta cadena correspondiente al trayecto propuesto. Aquí deletreándola a partir de un punto a la derecha abajo (ver figura siguiente).

$$(a^{-1})(a^{-1})(ab)(a)(b)(b^{-1}a^{-1})(b)$$

Les parenthèses marquent encore la décomposition de ce trajet en les noms des zones traversées dans l'ordre imposé par son parcours.

Retirons ces parenthèses:

$a^{-1}a^{-1}ababb^{-1}a^{-1}b$

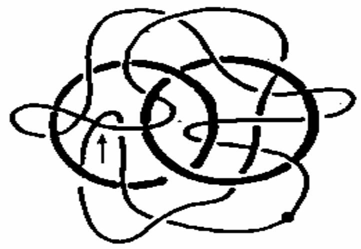
Los paréntesis marcan aún la descomposición de este trayecto en los nombres de las zonas atravesadas en el orden impuesto por su recorrido. Retiramos esos paréntesis: $a^{-1}a^{-1}ababb^{-1}a^{-1}b$

y simplificamos esta expresión gracias a nuevos paréntesis:

$$a^{-1}(a^{-1}a)b(a(bb^{-1})a^{-1})b = a^{-1}b^{2}$$

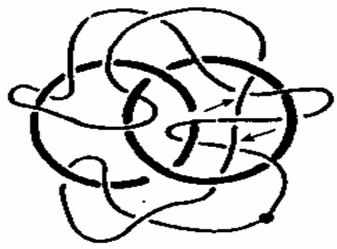
Nous allons vérifier ce résultat par des dessins, en indiquant les homotopies par des flèches avant de les effectuer. (Voir la *note sur l'homotopie* qui se réfère aux précedents exercices).

Verificaremos este resultado por dibujos, indicando las homotopías por flechas antes de efectuarlas. (Ver la nota sobre la homotopía que se refiere a los precedentes ejercicios.



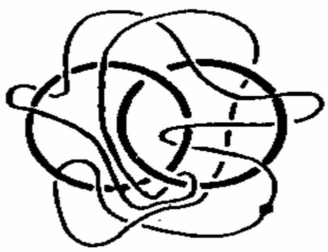
Une homotopie,

Una homotopía



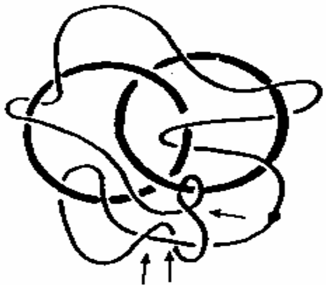
puis deux homotopies,

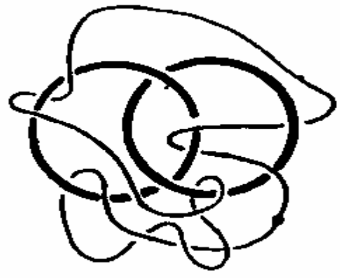
luego dos homotopías

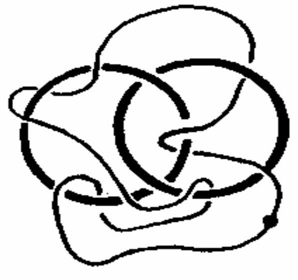


nous déplaçons une boucle elle glisse vers le bas, au centre.

Desplazamos un bucle Que se desliza hacia abajo al centro

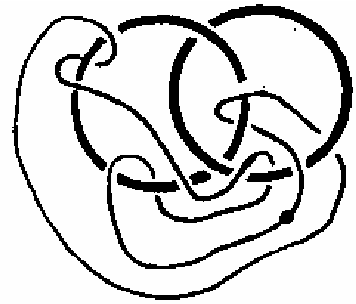






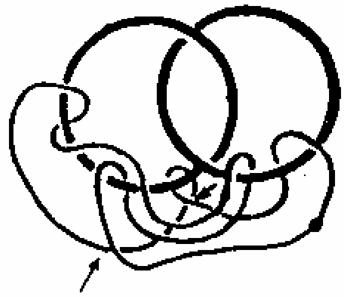
Trois homotopies, après avoir créé une boucle.

Tres homotopías luego de hacer creado el bucle



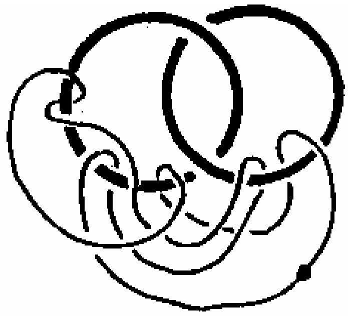
Nous déplaçons le fil vers le haut.

Desplazamos el hilo hacia arriba



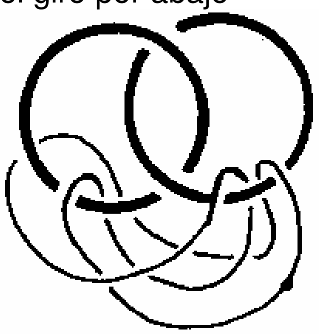
Les homotopies ont permis cette réduction.

Las homotopías permitieron esta reducción



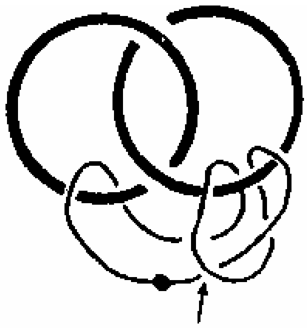
L'élément de fil qui passait en haut, fait le tour par en bas.

El elemento de hilo que pasaba por arriba hace el giro por abajo



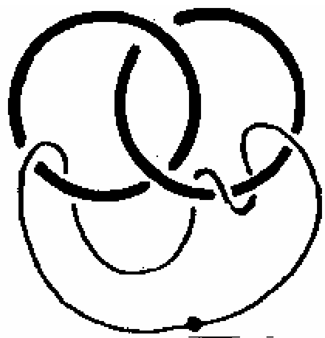
Encore quatre homotopies,

Ahora cuatro homotopías



effectuées.

efectuadas



Elles autorisent cette réduction.

Autorizan esta reducción

Une dernière homotopie.

Una última homotopía

$a^{-1}b^2$

$a^{-1}b^2$

c) *Changements de présentation.*

c) **Cambios de presentación**

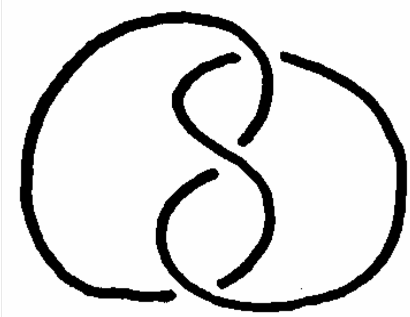
Exercice c_1:

Ejercicio c_1:

Invariance du groupe dans un changement de présentation de nœud: Calculer le groupe fondamental du nœud trèfle présenté dans la figure suivante.

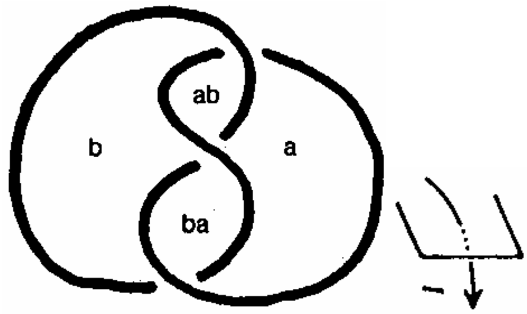
Invariancia del grupo en un cambio de presentación del nudo. Calcular el grupo fundamental del nudo trébol presentado en la figura siguiente:

Indication: Nous entamons le calcul par les zones génératrices a et b dans la solution suivante:



Indication: Nous entamons le calcul par les zones génératrices a et b dans la solution suivante:

Indicación : empezamos el cálculo por la zonas generatrices a y b en la solución siguiente:



Le groupe se présente donc avec deux générateurs puisque le calcul a pu être mené jusqu'au bout sans en ajouter d'autres.

La relation, dans ce cas, se formule ainsi grâce à un faufil autour du croisement central:

$$b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a = a \quad \text{soit: } b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba$$

El grupo se presenta entonces con dos generadores ya que el cálculo ha podido ser llevado hasta el final sin agregar otros.

La relación, en este caso, se formula así gracias a un hilván alrededor del cruzamiento central:

$$b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a = 1 \qquad b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba$$

Le groupe demandé se présente comme il suit:

$$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$$

El grupo demandado se presenta como sigue:

$$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$$

Comparons ce résultat avec celui de l'exercice b_1 où nous avions calculé le groupe du nœud trèfle comme résultat intermédiaire.

Il s'agit de formuler un isomorphisme entre ces deux résultats. Nous avions trouvé $G = \{a, b/aba^{-1} = b^{-1}ab\}$ dans l'exercice b_1.

Il suffit de montrer que ces deux groupes sont isomorphes (homomorphisme bijectif de groupe) à un même troisième.

2

$$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$$
$$a^{-1}ba^{-1} = ba^{-1}b$$
$$a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b = ba^{-1}ba^{-1}ba^{-1}$$

posons:

$$U = a^{-1}b$$
$$V = ba^{-1}$$

1

$$G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$$
$$bab = aba$$
$$bababa = ababab$$

posons:

$$U = ba$$
$$V = ab$$

Comparemos este resultado con el del ejercicio b1 donde habíamos calculado el grupo del nudo trébol como resultado intermedio.

Se trata de formular un isomorfismo entre estos dos resultados: habíamos encontrado $G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$ **en el ejercicio** b_1

Es suficiente mostrar que estos dos grupos son isomorfos(homomorfismo biyectivo de grupo) a un mismo tercero.

2

$$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$$
$$a^{-1}ba^{-1} = ba^{-1}b$$
$$a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b = ba^{-1}ba^{-1}ba^{-1}$$
$$U = a^{-1}b$$
$$V = ba^{-1}$$

1

$$G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$$
$$bab = aba$$
$$bababa = ababab$$
$$U = ba$$
$$V = ab$$

Dans les deux cas, la relation devient:

$$U^3 = V^3$$

et le groupe peut être présenté ainsi:

$$G = \{U, V / U^3 = V^3\}$$

En los dos casos la relación deviene:

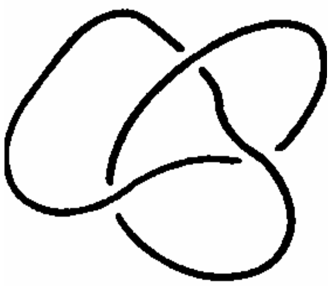
$$U^3 = V^3$$

Y el grupo puede ser presentado así:

$$G = \{U, V / U^3 = V^3\}$$

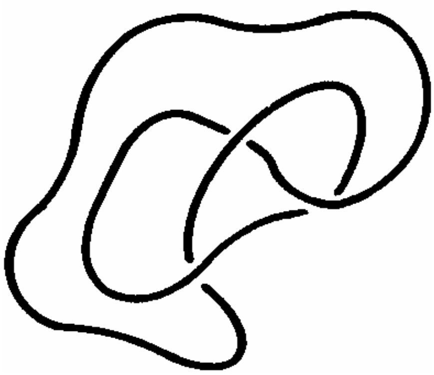
Vérifions par le dessin, dans un changement de présentation du nœud trèfle, qu'il s'agit bien du même nœud dans les deux cas:

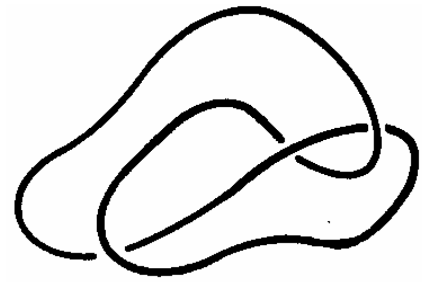
Verificamos por el dibujo, en un cambio de presentación del nudo trébol, que se trata ciertamente del mismo nudo en los dos casos:



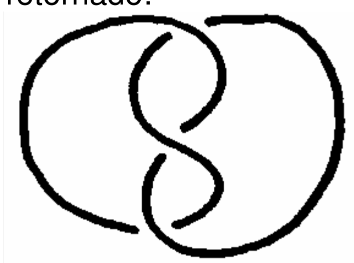
Nous retournons une boucle en lui faisant faire le tour du dessin:

Nosotros damos vuelta un bucle haciéndole hacer el giro del dibujo





reduciendo el bucle retornado:

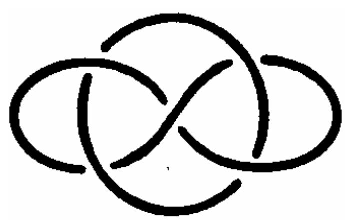


Exercice c_2:

Ejercicio c_2:

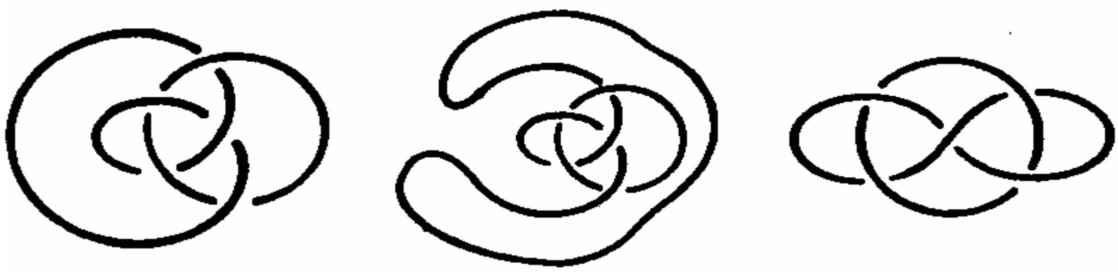
Même exercice à propos du *nœud de Whitehead* dans la présentation suivante.

El mismo ejercicio a propósito del ***nudo de Whitehead*** en la presentación siguiente:



Indications: Nous avons déjà rencontré ce nœud dans l'exercice corrigé a_1.
Vérifions par un changement de présentation qu'il s'agit bien du même nœud, en les dessinant.

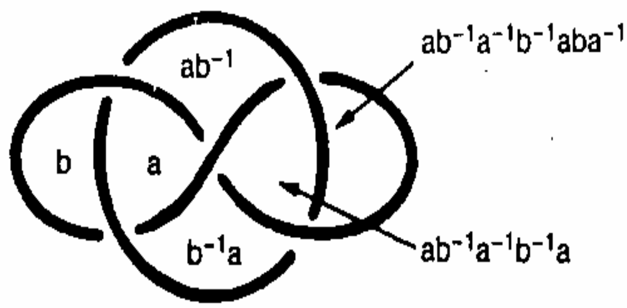
Indicaciones : hemos ya encontrado este nudo en el ejercicio corregido **a_1.**
Al dibujar ,verificamos por un cambio de presentación que se trata ciertamente del mismo nudo al dibujarlos.



Le résultat du présent exercice nous donne le marquage des zones suivant.

$$ab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1} = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}a$$

El resultado del presente ejercicio nos da el marcado de las zonas siguientes



$$ab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1} = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}a$$

avec la relation suivante:

$$a^2(bab)^{-1}ab = ba(bab)^{-1}a^2$$

Con la relación siguiente:

$$a^2(bab)^{-1}ab = ba(bab)^{-1}a^2$$

obtenida de la igualdad de los nombres de una misma zona.
Sea el grupo de este nudo:

$$G = \{a, b \,/\, a^2(bab)^{-1}ab = ba(bab)^{-1}a^2\}$$

que nous pouvons mettre en isomorphisme avec le résultat de l'exemple cité.

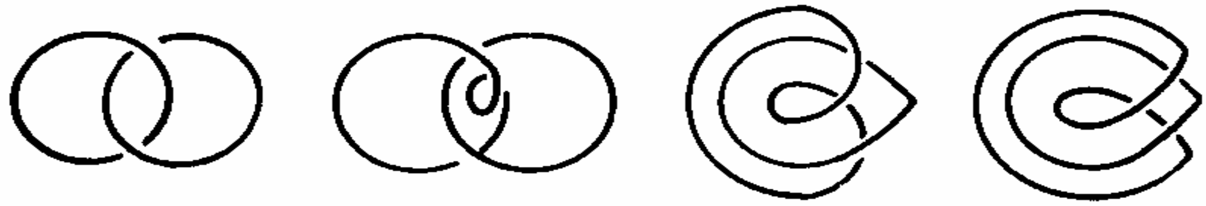
que podemos poner en isomorfismo con el resultado del ejemplo citado.

Exercice c_3:

Ejercicio ***c_3:***

Changement de présentation de *l'enlacement* (coupure de la bande de Moebius qui modifie la structure).

Cambio de presentación del enlace (corte de la banda de Möebius que modifica la estructura)

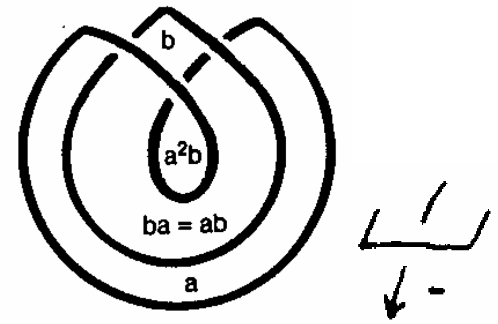


Calculer le groupe dans cette présentation de l'enlacement.

Ca
lcular el grupo en esa presentación del enlace.

Indications: Donnons le résultat.

Indicaciones : Damos el resultado.



G = {a, b/ab = ba}
groupe de l'enlacement.

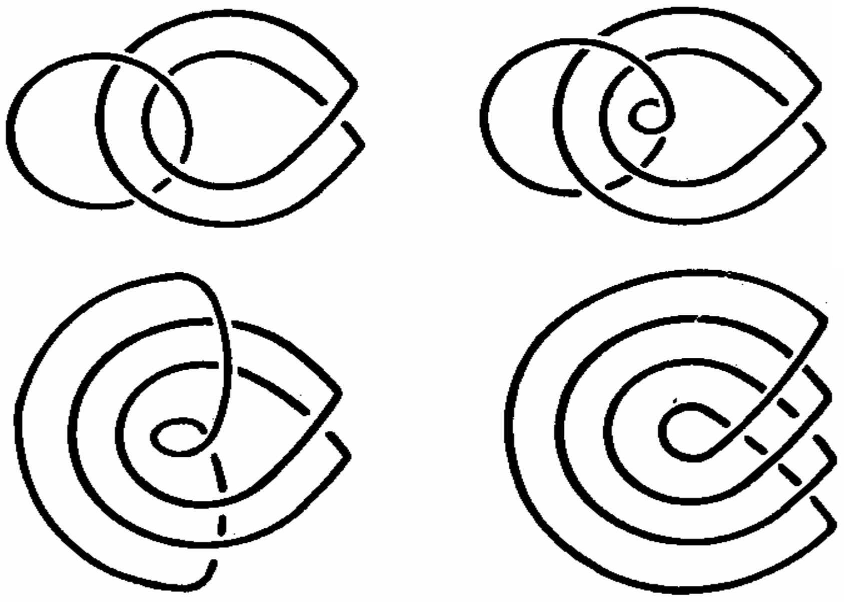
$$G = \{a, b / ab = ba\}$$ grupo del enlace

Exercice c_4:

Ejercicio c_4:

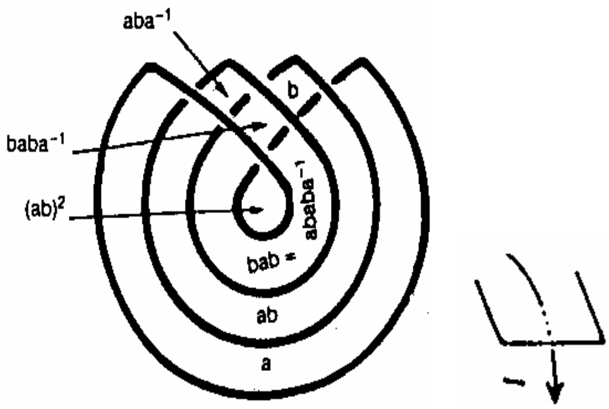
Même exercice que précedémment dans cette présentation du *double enlacement* (coupure de la bande de Moebius qui ne change pas la structure.)

El mismo ejercicio que el precedente, en esta presentación del doble enlace (corte de la banda de Möebius que no cambia la estructura.)



Indications: Donnons le résultat.

Indicaciones : damos el resultado.



$$bab = ababa^{-1}$$
$$baba = abab$$
$$G = \{a,b/(ab)^2 = (ba)^2\}$$

$$bab = ababa^{-1}$$

$$baba = abab$$

$$G = \{a, b/(ab)^2 = (ba)^2\}$$

Cet exercice amorce la suite de ce manuel, qui trouve ainsi son usage dans la théorie des surfaces topologiques rapportées aux nœuds[1]. Ici, les coupures de la bande de Moebius enlacées avec son bord.

Este ejercicio comienza la continuación de este manual, que encuentra así su empleo en la teoría de las superficies topológicas relaciones con los nudos [1]. Aquí, los cortes de la banda de Möebius enlazados con su borde.

1. J'OUIS SENS (les surfaces topologiques). Fascicule de résultats n.° 2 [1]

Jouis Sens (las superficies topológicas intrínsecas) Fascículos de resultados n°2

d) *Indice d'une zone par rapport à une courbe.*

d) Indice de una zona con relación a una curva

Voici deux exercices qui utilisent notre algorithme dans des résultats simples. Il s'agit de déterminer combien de fois une courbe tourne autour d'un point situé de manière quelconque dans une des zones déterminées par cette courbe dans le plan.

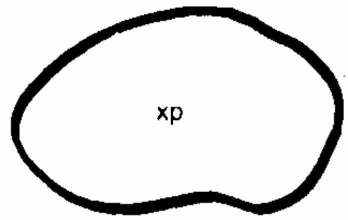
Par exemple, le cercle tourne une fois autour d'un point.

l'indice de la zone dans le cercle vaut 1.

He aquí dos ejercicios que utiliza nuestro algoritmo en resultados simples. Se trata de determinar cuantas veces una curva gira alrededor de un punto situado de manera cualquiera en una de las zonas determinadas por esta curva en el plano.

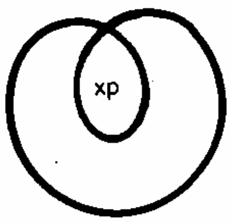
Por ejemplo, el circulo gira una vez alrededor de un punto.

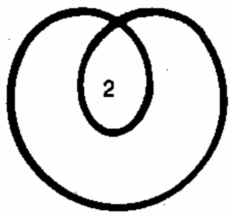
El índice de la zona en el círculo vale 1.



Un autre exemple est donné par le point p.

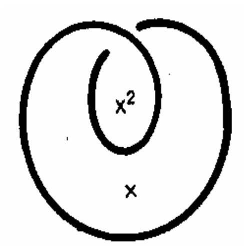
Otro ejemplo está dado por el punto p.





Il s'agit de conserver l'exposant des générateurs identifiés entre eux à une même lettre. Dans le cas du huit intérieur, il n'y a qu'un générateur, après avoir fait apparaître un nœud en choisissant un dessus-dessous arbitraire:

Se trata de conservar el exponente de los generadores identificados entre ellos por una misma letra. En el caso del ocho interior no hay más que un sólo generador, después de haber hecho aparecer un nudo eligiendo un arriba - abajo arbitrario.

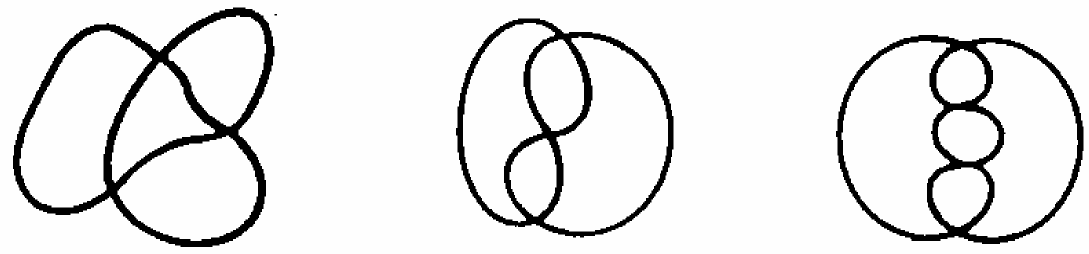


Exercice d_1:

Ejercicio d_1:

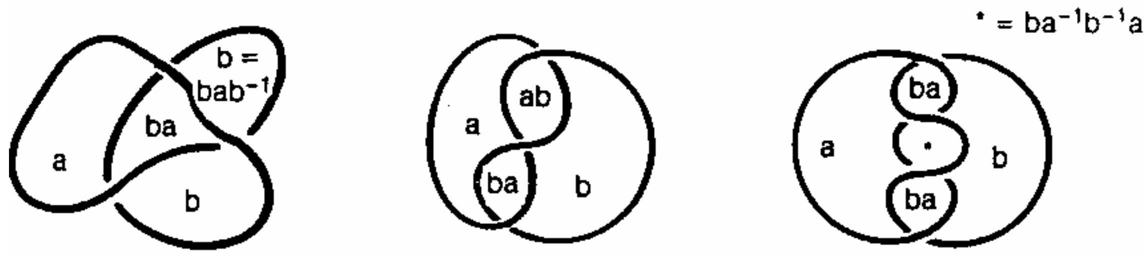
Calculer l'indice de zones des configurations planaires suivantes:

Calcular el índice de zonas de las configuraciones planares siguientes:



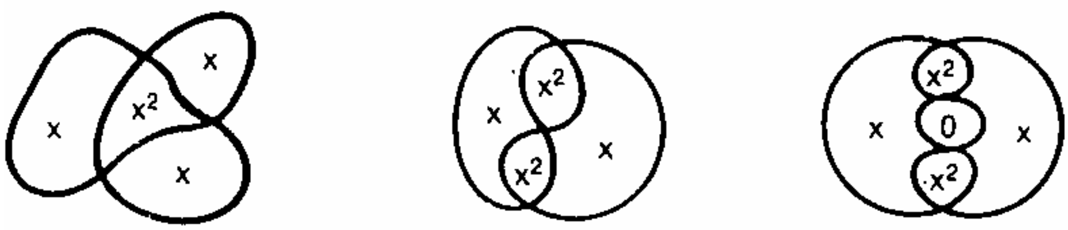
Indications: Après avoir calculé le groupe d'un quelconque des nœuds qui se projette ainsi (rétablir les dessus-dessous indiféremment), nous obtenons, en ne conservant que le degré (exposant) des générateurs identifiés entre eux à une même lettre:

Indicaciones: después de hacer calculado el grupo de uno cualquiera de los nudos que se proyecta así (restablecer los arriba abajo indiferentemente) obtenemos no conservando más que el grado (exponente) de los generadores identificados entre ellos por una misma letra:



$b = bab^{-1}$	$a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b = 1$	$ba^{-1}b^{-1}a$
$a = b = x,\ x = x$	$a = b = x,\ x^2 = 1$	$a = b = x$

$b = bab^{-1}$	$a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b = 1$	$ba^{-1}b^{-1}a$
$a = b = x, \quad x = x$	$a = b = x, \quad x^2 = 1$	$a = b = x$



Nous ne conservons que les exposants.

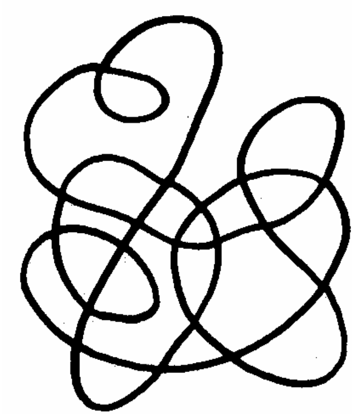
No conservamos más que los exponentes.

Exercice d_2:

Ejercicio d_2:

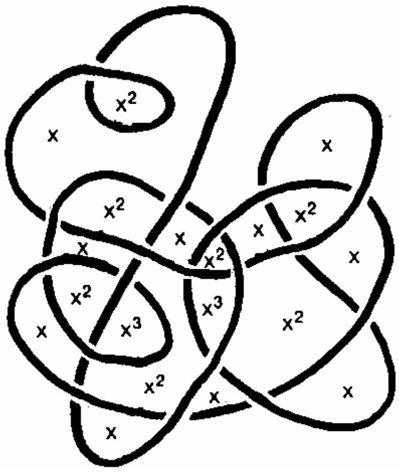
Donner les indices des zones dans la configuration proposée par Listing dans sa thèse [11 (p. 811-874). C'est la première fois que le terme de topologie est employé dans un ouvrage scientifique].

Dar los índices de las zonas en la configuración propuesta por Listing en su tesis [11(p.811-874) . Es la primera vez que el término "topología" es empleado en una obra científica.]



Indications: A provoquer un nœud, puis à identifier les générateurs entre eux, les exposants nous donnent les indices des zones.

Indicaciones : al provocar un nudo, y luego identificar los generadores entre ellos, los exponentes nos dan los índices de las zonas:

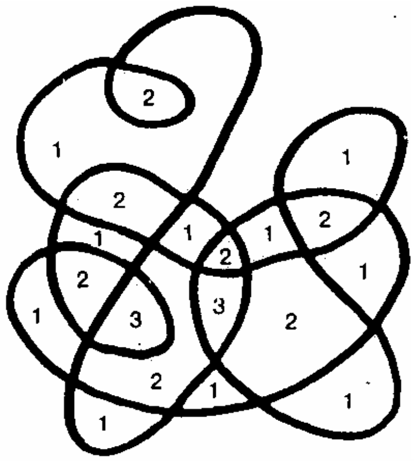


Es necesario utilizar tres generadores ,luego de haber planteado que :

$$a=b=c=x$$

Nous ne conservons ici que les exposants.

No conservamos aquí más que los exponentes



Listing donne ce résultat avec une figure qui rend compte de l'orientation du trajet. Ce que nous ne considérons pas ici.

Listing da este resultado con una figura que da cuenta de la orientación del trayecto. Esto es algo que no consideramos aquí.-