LU. Jean-Michel Vappereau
Traducción: Paula Hochman
15. El corte en teoría de superficies. Las superficies topológicas intrínsecas.

El corte en teoría de superficies

Las superficies topológicas intrínsecas

Presentación

Hay dos presentaciones elementales de la teoría de superficies topológicas intrínsecas.
La primera construye los objetos de la teoría a partir de pedazos de planos, siempre equivalentes los unos a los otros, por un principio de montaje simple; asociamos su estilo al nombre de Griffith (18)

La segunda produce los objetos de la teoría a partir de un polígono plano cada vez, del cual se dice cómo se corresponden los lados dos a dos; asociamos su factura al nombre de Cartan (11)
Vamos a mostrar dónde una primera dificultad se encuentra para el debutante; cómo esas dos presentaciones se traducen una en la otra y a continuación en qué el corte, del cual queremos mostrar la función estructural en términos de superficies, resuelve esas cuestiones. A partir de allí, la teoría se desarrolla sin dificultades especiales y el lector puede encontrarla en buen número de excelentes libros.

1. **La presentación de Griffith**

Tomamos polígonos irregulares, en cartón o en estofa por ejemplo.
Esos elementos de superficies no deben poseer ninguna otra singularidad, es una condición.

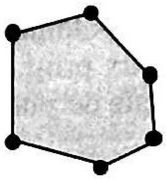


Fig.1

Ellos son equivalentes a un triángulo o a un disco.

Fig.2

Los reunimos respetando dos principios de montaje.

a_1 - Dos pedazos son cosidos o pegados juntos a lo largo de dos segmentos de sus bordes respectivos que devendrían una frontera común entre ellos (fig.3)

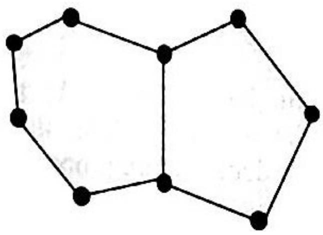
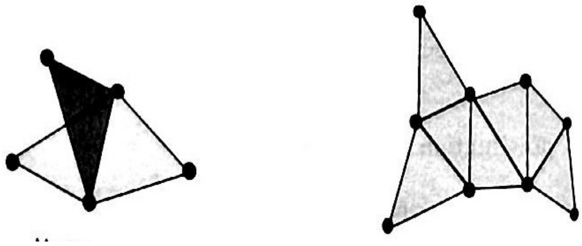


Fig.3

a_2- No más de dos pedazos son pegados o cosidos a lo largo de un mismo segmento (fig.4)



Montaje no admitido Montaje admitido Fig 4

Llamaremos superficie topológica o estofa un ensamblaje que respeta esos dos principios de montaje que responden a la condición de ser porciones de plano.

Entre esos montajes algunos presentan características topológicas en común. Eso permite hacer clases de equivalencia de esos montajes. Llamaremos superficies topológicas intrínsecas esas clases de equivalencias. El primer movimiento de la teoría da una clasificación de esas superficies, alrededor de un teoremaimportante[1].

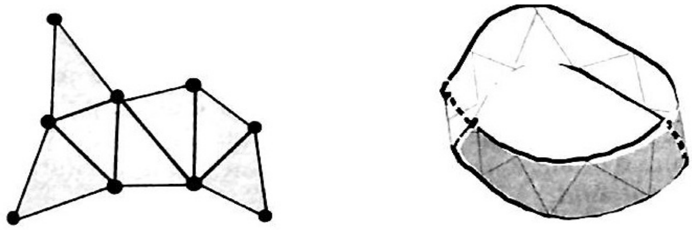
Del borde

El interés mayor de esta presentación reside en el tratamiento intuitivo y muy simple de la noción de borde.

Cada elemento de montaje tiene un borde, poligonal, fácil a designar intuitivamente. El borde de un montaje es la suma de sus bordes elementales disminuido de los segmentos que han servido al montaje (fig.5).

Borde de un elemento Borde de un montaje Fig.5

Una pequeña lógica del borde se esboza a partir de allí, si el lector hace la experiencia de construir algunos ejemplares, complicando el problema al máximo. Puede darse cuenta que el borde puede súbitamente presentar dos componentes mientras que no estaba al comienzo constituido más que de un elemento, que hacía un ciclo alrededor de los primeros montajes (fig.6).



Un componente de borde Dos componentes de borde

[1]Estofa, p.88.

Hay esta presentación de las superficies con borde y superficies sin borde. Podemos siempre anular todos los componentes de borde restantes gracias a pastillas cuyos bordes estan descompuestos en segmentos.

2. **La presentación de Cartan**

Un representante de la clase de equivalencia que es una superficie topológica intrínseca sin borde es realizada a partir de un polígono plano teniendo un número par de lados. Sus lados estan orientados e indexados de manera de corresponderse dos a dos como lo muestra la figura 7.

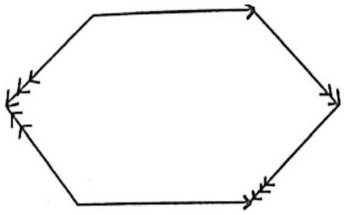


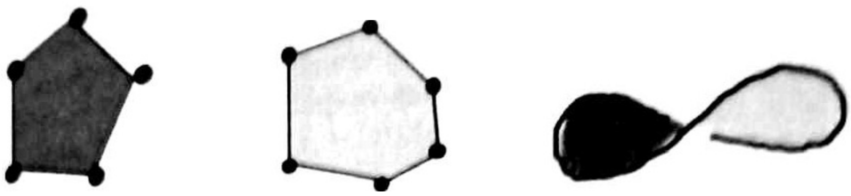
fig.7

Este esquema indica que los lados que llevan el mismo número de espigas deben ser identificados respetando la orientación indicada por este tipo de flecha. El inconveniente de esta presentación reside en el carácter poco realizable de los montajes en cuestión, a falta de disponer de un material bastante flexible. Ella tiene en cambio la ventaja de no ser engañosa sobre el carácter efectivo de los objetos reales de la teoría que son ficciones de superficies.

3. **Una primera dificultad común a cada obra que trata esas cuestiones**

Las cosas comienzan a complicarse cuando queremos ser más precisos en el tratamiento del borde en la presentación de Griffith. Cuando queremos orientar el borde, cuando es necesario orientar el borde a fin de obtener una escritura correcta de esta cuestión.

a1- Aportamos una primera precisión importante en esta dificultad. Podemos proponernos dar una versión en color de la presentación de Griffith a fin de dar cuenta de la orientación de los pedazos de estofa y en consecuencia de su borde.
Retomemos la construcción suministrándonos pedazos de estofa reversibles de las cuales cada lado, como se dice, cada cara es de color diferente (rojo y verde fig.8).



Un lado rojo Un lado verde El pedazo plegado Fig.8

Y convengamos decir que el borde de un pedazo rojo gira en el sentido positivo, que el borde de un pedazo verde gira en el sentido negativo (fig.9).

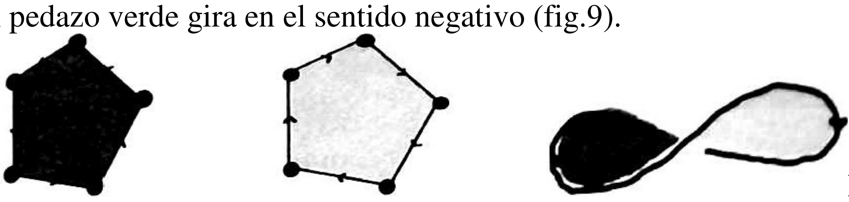


Fig.9

Es de hecho respetar lo que se produce cuando damos vuelta el pedazo de estofa como un panqueque.
Adoptamos entonces la convención siguiente, resumida en dos pequeños dibujos,

Fig.10

donde la orientación [2] del borde de un pedazo coloreado de un solo color depende del color de ese pedazo de estofa. El color se extiende en el borde como una orientación de ese borde (fig.10).
Construimos así un modelo de la teoría de superficies que conviene a lo que queremos mostrar.
Aparece entonces una distinción que no es desdeñable en el montaje de pedazos elementales, esos pedazos de esfera o de plano que no presentan ninguna singularidad. Por el hecho de su coloración será sensible al lector que el resultado del montaje no sea el mismo según que cosamos dos pedazos de estofa de tal manera que sus caras respectivas del mismo color se encuentren conjuntas por la costura, o que ésta reúna dos caras de colores diferentes (fig.11)

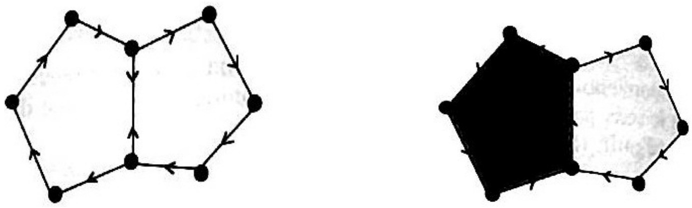


Fig.11

Pues podemos constatar queen el primer caso, la orientación de los bordes respectivos de dos pedazos se compone agradablemente para indicar que ella es la orientación global del nuevo borde así constituido del pedazo de estofa compuesto. Mientras que en el otro caso, las orientaciones respectivas se contradicen e impiden hablar de la orientacioón global del borde del compuesto. Diremos que el compuesto está desorientado en cuanto a su borde.
Y vamos inmediatamente a precisar eso dando algunas definiciones principales.
Llamaremos composición por *anulación de borde* la costura de dos pedazos de estofa que asegura la conjunción de dos caras del mismo color (fig.12).

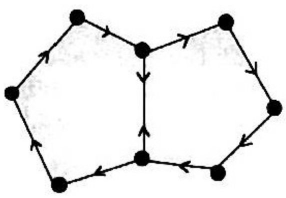


Fig.12

El *borde* compuesto estará entonces constituido de los segmentos respectivos de los dos bordes iniciales que no han servido al montaje. Ese borde compuesto será orientable. Los dos segmentos respectivos que han servido al montaje se conjugan en sentidos contrarios, lo que justifica que hablemos de su anulación recíproca. Ellos forman así lo que llamaremos un

[2] La cuestion de nombrar esos dos sentidos de la orientación negativo-positivo, derecha-izquierda, levogiro-dextrogiro, ocupa también la física molecular.

segmento de borde nulo o una *frontera* en tanto que ésta puede borrarse por el hecho que lo que pasa (color) de un lado es igual a lo que pasa (color) del otro lado (fig.13).

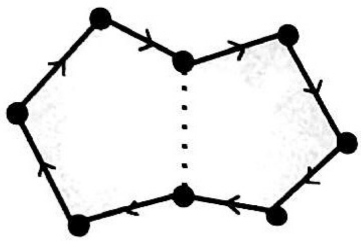


Fig.13

Llamaremos composición por *identificación de borde*[3]la composición de dos pedazos de estofa que produce la proximidad de dos caras de colores diferentes (fig.14).

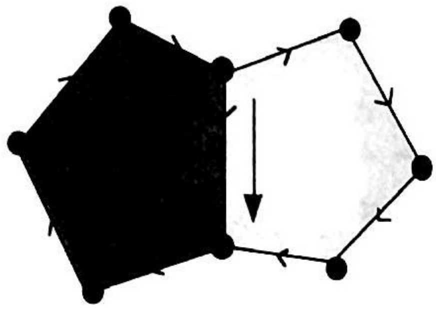


Fig.14

No podemos hablar en ese caso del borde del compuesto de otro modo que diciendo supseudo-borde. El esta constituido de los segmentos respectivos de los dos bordes iniciales que no han servido al montaje. El no es orientable o está desorientado. Eso será un pseudo-borde no orientado. Los dos segmentos respectivos que han servido al montaje se conjugan en el mismo sentido, lo que justifica que hablemos de su identificación. Ellos formarán así lo que llamaremos un segmento de *borde que consiste* en tanto que éste se encuentra en la superficie obtenida, consiste en esta superficie al separar dos colores y que en consecuencia no puede ser borrado. Lo trazaremos con un trazo más grueso que está orientado (fig.15).

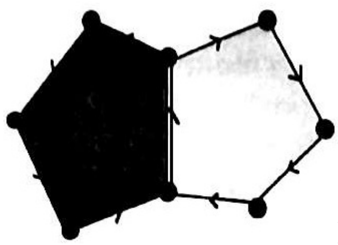


Fig.15

Deviene evidente en ese caso que la composición de tres pedazos de estofa deviene interesante, sabiendo que todos nuestros pedazos iniciales son equivalentes bicoloros (sus bordes están orientados) y sin singularidad (pedazos de esfera), no puede haber más que dos

[3] Ese término, como el que precede, *anulación de borde*, nos ha sido propuesto por J.Trentelivre mientras que redactamos con él Estofa. Lo hemosadoptadodespués.

casos cuando agregamos el tercer pedazo a lo largo de dos aristas adyacentes al segmento de borde que consiste (fig.16)

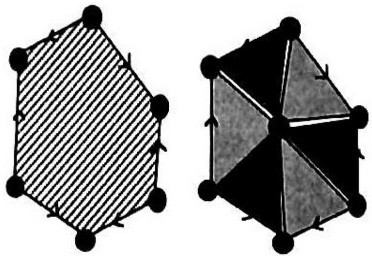
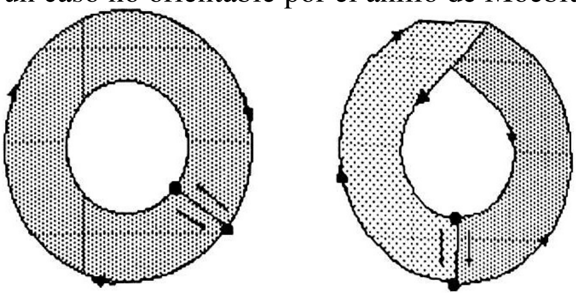


fig.16

donde vemos que el borde que consiste va a prolongarse.
Dejamos al lector la continuación de esta reflexión para responder gracias a esos elementos a las cuestiones planteadas por nuestras dos presentaciones de la teoría de superficies topológicas intrínsecas cuando uno quiere acordarlos entre ellos.
En esta presentación definitiva construimos siempre eso que llamaremos *pavimentos orientables por pedazos* (específicos) cualquiera sea el modo de composición empleado.

4. **Reinterpretación de la teoría de superficies en teoría de los montajes orientables por pedazos**

a_1 - La presentación de Griffith puede satisfacerse de la composición por anulación de borde tanto como ella no encuentra montaje de género más complicado que la esfera. Se plantea entonces, en el caso contrario (por ejemplo una banda) cuando queremos encerrar un primer anillo, la cuestión de una elección entre dos posibilidades, ya sea un caso orientable por un anillo esférico, ya sea un caso no orientable por el anillo de Moebius (fig.17).


Caso orientable
anillo esférico
Caso no orientable
anillo de Moebius
Fig.17

No hay que equivocarse tampoco olvidando que el anillo de Moebius puede ser obtenido por un montaje de ese tipo (fig.18)

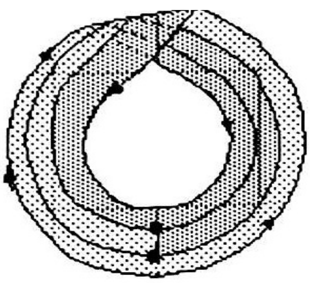


Fig.18

donde vemos por primera vez que el borde que consiste puede no encontrar el borde que insiste (borde orientado o pseudo-borde no orientado) y en consecuencia cerrarse como un círculo que consiste en la estofa.

a_2- La presentación de Cartan no utiliza más que identificaciones de borde en el marcado de los segmentos que ella utiliza para indicar la superficie que ella apunta obtener y utiliza la mayor parte del tiempo (en muy raras expresiones) pedazos de estofa a pseudo-borde no orientable. Si retomamos el ejemplo que hemos dado para introducirlo (fig.19)

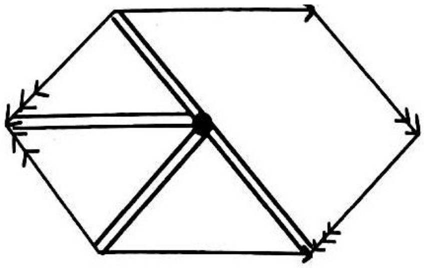


Fig.19

lo completaremos por los segmentos de borde que consiste, segmentos que permiten reorientarlo por pedazos respetando las orientaciones del segmento del pseudo-borde que van a ser identificados en la teoría y producir por consecuencia otras porciones de borde que consiste.

Conclusión

Dejamos entonces al lector el cuidado de continuar siguiendo uno cualquiera de los diferentes autores (4) que ha desarrollado esta teoría. No sin aconsejar hacer el mayor caso a las distinciones que acabamos de producir.

Agregaremos que el Dr. Lacan ha condensado su interés por las superficies topológicas y el uso que de ellas ha encontrado durante diez anos (1961-1971) a fin de marcar una etapa en la fundación, por su formalización, del discurso analítico; en esta formalización principal del borde y especialmente del borde que consiste del cual se puede decir que ha hecho argumento de estructura bajo el nombre de corte. ¿No ha hablado de deseo?

Uno se remitirá pues para eso a los numerosos escritos de este período hasta El aturdicho (E u, 1971) y a las lecciones de seminarios que les son contemporáneos.

Jean-Michel Vappereau
diciembre 1991

Traducción : Paula Hochman
Inserción de esquemas : Mónica Jacob
febrero 2026