El paraíso de las biyecciones

a Pierre Soury

***No nos dejaremos expulsar del infierno que Freud creó para nosotros, nosotros lo hacemos mover*.**

Para una enseñanza de las matemáticas que depende de la razón de su materialidad literal (*encadenamiento efectivo*), tenemos la oportunidad que nos ha sido dada de definir las *biyecciones y su grupo algebraico* en el caso de las *aplicaciones biyectivas*. Estas últimas dando lugar, como dice la canción [1], a un pequeño rincón de paraguas en un pequeño rincón del «*paraíso que Cantor creó para nosotros*», según Hilbert, nosotros precisamos la definición de las *funciones biyectivas* y de los *objetos matemáticos* (matemas), cuya práctica y flexibilidad pueden, a veces, llegar hasta graves negligencias respecto de los estudiantes en los cursos de matemáticas.

1. – Biyecciones

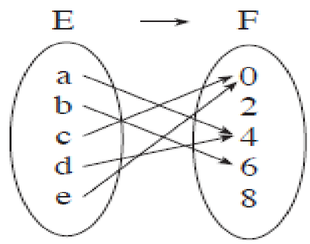
La definición de las funciones biyectivas, con su presentación en álgebra [2], resulta bastante divertida. En efecto, a menudo se trata de contentarse con las aplicaciones biyectivas de la teoría de conjuntos.

A algunos les parece que basta con decir que una aplicación f es una correspondencia definida entre los elementos de un conjunto notado: E, con los elementos de otro conjunto notado: F, lo cual da lugar a un matema conjuntista constructible, es decir, bien construido.

$$f : E \rightarrow F$$

Este grafema es un enunciado que da lugar a un objeto efectivo a partir de la teoría de conjuntos de Cantor, salvada gracias a su versión axiomatizada (Z-F) por Zermelo y Fraenkel, quienes aceptan abandonar ciertos prejuicios como el de creer que toda clase de extensión de concepto es un conjunto, en particular hacer el duelo de la clase universal de una teoría de conjuntos como objeto intrínseco a la teoría.

Para ilustrarselos, se les da un diagrama del tipo



que todo el mundo comprende, a condición de no ser juzgado por los otros como estúpido, donde los elementos respectivos de E y de F están colocados en una burbuja, pero de lo cual basta constatar que podemos escribir lo mismo de una manera menos elocuente en una sola línea, más cercana a la escritura ordinaria (alfabética), en extensión en este caso finito,

---

[1] Georges Brassens, un pequeño rincón de paraíso bajo un pequeño rincón de paraguas.

[2] Indiquemos, desde el comienzo, que queremos volver con precisión sobre esta definición de las funciones en tanto se trata de relaciones funcionales tal como serán definidas en lo que sigue. La teoría de conjuntos no debe quedar como ocasión para descuidar la lógica que abre a otros tipos de escritura igualmente matemáticos.

$E = \{a, b, c, d, e\}$ y $F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
con *llaves: {, },* que forman ahora también parte de los matemas de la teoría de conjuntos.

Lo más importante sigue siendo indicar el trenzado de flechas para anotar la correspondencia elemento por elemento, que aquí escribiremos, de manera más simple también en una sola línea, por ejemplo

$f(a) = 4, f(b) = 6, f(c) = 0, f(d) = 4, f(e) = 0,$

a fin de definir dicha aplicación.

Al comienzo, las cosas parecen simples. Se nos dice que una aplicación es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, con inmediatamente las dos definiciones de estas propiedades sobre las cuales el buen alumno se precipita.

Inyectiva

Una aplicación es inyectiva si todos los elementos que son alcanzados en el conjunto de llegada, aquí F de nuestro ejemplo, no son alcanzados más que una vez y una sola vez. O, para decirlo de otro modo, no son la imagen sino de un solo elemento del conjunto de partida, aquí E de nuestro ejemplo.

Salta a la vista de quien se ejercita en leer que la aplicación tomada como ejemplo no es inyectiva, por el hecho que se transcribe, $f(a) = f(d) = 4$, pero también $f(c) = f(e) = 0$.

La propiedad de las aplicaciones inyectivas se escribe en el sistema de escritura llamado del cálculo de los predicados cuantificados de primer orden, que sirve para escribir la teoría de conjuntos Z-F,

$$\forall x \ \forall x' \ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

Aquí, la negación de esta propiedad es verificada por nuestro ejemplo; se escribe,

$$\exists x \ \exists x' \ (f(x) = f(x') \ \wedge \ x \neq x')$$

Sobreyectiva (o suryectiva)

Una aplicación es sobreyectiva si todos los elementos son alcanzados en el conjunto de llegada, aquí F de nuestro ejemplo. O, para decirlo de otro modo, los elementos de F son todos imagen de al menos un elemento del conjunto de partida, aquí E de nuestro ejemplo.
Vuelve a imponerse al espíritu de quien intenta leer que la aplicación tomada como ejemplo no es sobreyectiva, por el hecho que se transcribe

4 y 10 en F no son la imagen de ningún elemento de E.

O bien, para decirlo de otro modo, más lapidario: no hay elemento de E que tenga como imagen por f los elementos 2 y 8 de F.

La propiedad de las aplicaciones sobreyectivas se escribe también en el *mismo sistema de escritura,*

$\forall y \ \exists x \ (y = f(x))$ **: f es sobreyectiva o suryectiva**

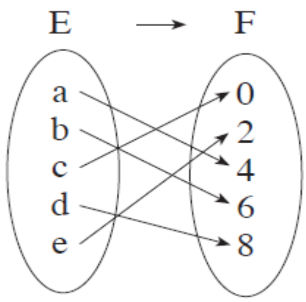
y su negación, que es verificada por nuestro ejemplo, se escribe igualmente así

$\exists y \ \forall x \ (y \neq f(x'))$ **: f no es sobreyectiva.**

Podemos entonces finalmente llegar a las aplicaciones biyectivas.

Biyectiva

Demos el ejemplo de una aplicación f' de E en F que sea biyectiva, con



f '(a) = 4, f '(b) = 6, f '(c) = 0, f '(d) = 8, f '(e) = 2,

que verifica a la vez

$\forall$ x $\forall$ x'(f '(x) = f '(x') $\Rightarrow$ x = x') f ' es inyectiva y

$\forall$ y $\exists$ x (y = f '(x)) f ' es suryectiva

Así f ' es biyectiva.

De esta definición de las aplicaciones biyectivas entre dos conjuntos se sigue un teorema

Teorema

Para toda aplicación biyectiva existe una aplicación biyectiva recíproca.

y tres consecuencias.

1 – Números

La existencia de una biyección entre dos conjuntos produce una relación llamada de equipotencia o de congruencia entre los conjuntos. Relación que presenta un invariante a través de las biyecciones que definen esta relación; este es designado como el cardinal de los conjuntos considerados; este cardinal invariante es constante entre conjuntos equipotentes o congruentes entre sí.

El cardinal de un conjunto se reputa corresponder al número de sus elementos. Pero por este hecho los números cardinales están definidos como invariante de la relación de equipotencia o de congruencia entre conjuntos, pero aún no son constructibles por este solo hecho; no podemos responder a la pregunta: «¿cuántos?».

Los conjuntos tienen un número de elementos, designado como su cardinal, invariante entre conjuntos congruentes entre sí, pero en este instante de la construcción matemática nadie sabe cuál es ese número. Por la simple razón de que solo será conocido como número cuando los números sean construidos en tanto conjuntos.

Ahora bien, en teoría de conjuntos son los conjuntos ordinales los que vienen a comenzar la construcción de los números, para verificar los axiomas de Peano: gracias a la definición de un primer término, digamos: cero, escrito 0 en aritmética, con el conjunto vacío, notado: $\varnothing$, y de la función sucesor de x, digamos: «x más uno», escrito (x+1) en álgebra, con la expresión notada: (x $\cup$ {x}), si se quiere respetar la tradición.

Volveremos sobre «este pequeño problema», que parece accesorio para los profesores de matemáticas, pues, para nosotros, el descubrimiento de los números, durante el aprendizaje de la lengua por los niños, comienza por los números cardinales sin la congruencia. Esto quiere decir que conocen números por el hecho de hablar, de nombrar, y saben servirse de ellos antes de haber aprendido a contar.

En el empleo de los números legibles, aún no recurren a los números ordinales definidos como objetos abreviadores conjuntistas gracias a una especificación a la B. Russell.

Los números cardinales vienen como adjetivos, pero también son nombres de atributos reconocidos y nombrables por el sujeto de lalengua, la lengua vulgar, según Dante [3], cuando todavía es hablada de manera exclusiva, por oposición a esa otra lengua, la gramática, que exige estudio, siguiendo el ejemplo de la gramática latina.

2 – Aplicaciones recíprocas biyectivas de una biyección (la enseñanza de las matemáticas)

El delicioso teorema entre biyecciones que sigue a su definición y se enuncia de manera tan perfecta,

Teorema

Para toda aplicación biyectiva existe una aplicación biyectiva recíproca.

Sin que se note demasiado, este teorema presenta dos partes distintas o dos resultados encajados entre sí. Uno consiste en demostrar, primero, que a partir de una biyección existe siempre otra aplicación llamada aplicación recíproca y, luego, como segundo resultado, consiste en demostrar que esta nueva aplicación es biyectiva.

Así, a partir de las dos propiedades de inyectividad y suryectividad que caracterizan a las aplicaciones biyectivas, debemos poder deducir la existencia de otra aplicación antes de demostrar que esta, esta nueva aplicación, presenta también estas dos propiedades.

No escapará al lector que, en el estado de la exposición precedente y que se contenta con presentar la noción de función en el caso de aplicaciones entre dos conjuntos mediante un esquema, falta un dato que debe precisar la definición de la noción de función antes de definir la de aplicación en teoría de conjuntos, a fin de disponer de las demostraciones de las dos partes de este teorema.

Ahora bien, las aplicaciones son las funciones específicas de la teoría de conjuntos, las flechas de la categoría, y son también conjuntos, los objetos específicos de la teoría, al mismo título que cualquiera de los otros objetos. Los objetos y las flechas entre objetos, pues estas también son objetos. No hay seriamente lugar para hablar de metalenguaje en las escalas de estructuras, digamos los registros de lo simbólico (incluso estrictamente escrito aquí).

Digamos la estructura erótica y violenta del narcisismo introducida en una pequeña monografía por Freud en respuesta a Jung.

Todos los médicos lo sabían: «El enfermo habla mal, erróneamente, de su cuerpo; intrínseco a ese cuerpo debe considerarlo también en posición de sujeto, extrínseco a su cuerpo». Freud es el primero en hacer de ello un infierno trágico de la sexuación para el sujeto que no logra practicarla (la psicosis paranoica), monografía del narcisismo donde hace retorno anatómico el aspecto genital de la sexualidad mamífera.

Sabiendo que todos los objetos de esta teoría son constructibles a partir de los axiomas, en tanto que estos objetos son ellos mismos conjuntos, la teoría de conjuntos constituye efectivamente la categoría refugio de las matemáticas clásicas, producidas antes de Cantor y de manera intuitiva sin él, cuyos objetos son los conjuntos y cuyas flechas son las

[3] Dante, DE LA ELOCUENCIA EN LENGUA VULGAR, solamente

aplicaciones, blanco de los «funtores del olvido» para algunos matemáticos, pero no para todos.

Ahora bien, para lo que aquí nos ocupa, cuestión pedagógica de obliteración, no se trata de la definición menos restrictiva de la noción de función, como vamos a precisarlo.

3 – Finalmente el paraíso

Las biyecciones forman incluso un conjunto dado cuando son compuestas entre sí en torno a un único y mismo conjunto; los automorfismos de un conjunto forman un grupo algebraico. Esto quiere decir que todo gira bien, que gira en redondo, como en el paraíso donde no hay conflicto entre las almas bienaventuradas que han sido aceptadas allí. Esto es lo que designamos como el paraíso de las biyecciones. Su señuelo permite sorprenderse de lo imposible demostrado con el teorema de Lacan.

2 – Las relaciones funcionales

Aprovechamos entonces esta nota relativa a las funciones biyectivas para precisar qué es una función en el sentido más amplio desde el estudio de la lógica contemporánea, definición que sigue siendo muy accesible, aunque demasiado a menudo olvidada por los matemáticos que enseñan, y que debe estar bien formulada incluso antes de hablar de aplicaciones en teoría de conjuntos.

Según nuestro conocimiento, fue el gran Riemann uno de los primeros en plantear la cuestión de saber qué es una función de manera independiente del conocimiento de funciones singulares, a menudo bien conocidas. Dejaremos las aplicaciones para un estudio más específico de la teoría de conjuntos.

Las funciones responden a las condiciones necesarias para la introducción de un tipo de letras de abreviación, llamadas símbolos abreviadores de función o, más simplemente: «símbolos de función».

Las funciones son letras constructibles según criterios de escritura precisos y consecuentes en el cálculo de predicados poliádicos cuantificados de primer orden. Estos criterios son la razón de las demostraciones matemáticas y aseguran la materialidad efectiva de la escritura matemática bajo el aspecto de encadenamientos borrados pero presentes para el matemático que no vuelve sobre ellos de manera constante, en la medida en que esto resulta evidente o intuitivo.

Definición

Las funciones son relaciones funcionales que se escriben gracias a dos propiedades sintácticas de pura literalidad de una relación poliádica. Debemos disponer, como parte del sistema de escritura (S, T) en el que se trabaja la matemática, de dos tesis que escriben estas propiedades relativas a esta relación de S, notada aquí: $\phi(x,\ldots, y)$, deducibles a partir de los axiomas de T.

Para ayudar a la lectura mediante algún aspecto semántico, se supone que estas funciones están definidas entre clases de extensión de funciones proposicionales de Frege, es decir, que están definidas entre conceptos. Hay un dominio de definición en la fuente y un dominio imagen en el lugar del fin, cada uno definido por un concepto escrito mediante una función D(x) e I(y). Aquí la apariencia monádica de la escritura no debe engañar, pues los elementos pueden revelarse como n-uplas $x = (x,\ldots, z)$ e $y = (t,\ldots, y)$, elementos de productos de varias clases.

Luego, la relación $\Phi(x, y)$ definida entre estas clases de extensión de los dos conceptos, notados de la misma manera por la expresión de los conceptos D(x) e I(y).

Pero esta relación puede ser funcional; esto es lo más importante y lo más determinante. Vamos a explicar la razón de esta distinción, que permite introducir nuevos términos inmediatamente después de haberlos formulado.

Definamos estas dos propiedades en el caso de una función de un solo [4] valor y para una sola variable x, a fin de aligerar la lectura para el lector principiante.

Una condición de existencia del objeto imagen en la extensión del fin, dominio imagen I(x)

(1) $\forall x\ \exists y\ \Phi(x, y)$

Una condición de unicidad de este objeto imagen en la extensión del fin, dominio imagen I(x)

$$(2)\ \forall x\ \forall y\ \forall y'\ [\ (\ \Phi(x, y) \wedge \Phi(x, y')\ ) \Rightarrow (y = y')\ ]$$

Esta doble condición tendrá una consecuencia bastante descuidada por los lógicos y los matemáticos que enseñan su disciplina, en tanto se trata de una consecuencia material ligada a *la efectividad (Wirklichkeit)* de las matemáticas, respecto de la cual todo el mundo prefiere mantener *un misterio cuasi-religioso*, incluso *místico*, aun cuando no sea más que filosófico, es decir, idealista, y ahora *una verdadera realidad concreta cuasi-positivista*, incluso todavía *mecanicista,* hoy suntuosamente *electrónica, industrial y monetarista*, aunque no sea más que pretendidamente *científica.*

Estas condiciones permiten introducir una letra de abreviación, aquí una letra de función notada: f, y así construir un nuevo objeto matemático, con ocasión de las expresiones específicas que, en el curso de sus enunciados respectivos, contienen un enunciado cualquiera notado: E(y), que presenta la letra y, aquí, del tipo

(a) $\forall x\ \forall y\ [\Phi(x, y) \Rightarrow E(y)]$

o (b) $\forall x\ \exists y\ [(\Phi(x, y) \wedge E(y)]$

dando lugar uno u otro, tanto uno como el otro, a la nueva expresión

(c) $\forall x\ E(f(x))$

[4] En el caso de las funciones poliádicas, de varias variables, las estructuras sintácticas de estas condiciones se encuentran escritas para las n-uplas x = (x, …, z) e y = (t, …, y), elementos de productos de varias clases para la condición de existencia

1) $\forall x \ldots\ \forall z\ \exists y \ldots\ \exists t\ \varphi(x,\ldots,z, t, \ldots, y)$

así como para la condición de unicidad

2) $\forall x \ldots \forall z\ \forall t \ldots \forall y\ \forall t' \ldots\ \forall y'\ [(\varphi(x,\ldots,z, t, \ldots, y) \wedge \varphi(x,\ldots,z, t', \ldots, y')\ ) \Rightarrow ((t = t') \wedge \ldots \wedge (y = y')\ )]$

Atención: el recurso a la noción de términos notados: t, (t = x) o (t = x, …, y) para las relaciones no resuelve la diferencia entre el cálculo de predicados monádicos consistente y completo y el cálculo de predicados poliádicos, pues su inconsistencia proviene de la cuantificación, letra por letra, para varias variables.

J. Hintikka demostró (*Los principios de las matemáticas revisitados*, 1996), por su práctica de las construcciones de dominio de extensión, instruida por la semántica de las lógicas modales, que no solo Frege, sino también la mayor parte de los lógicos y matemáticos del siglo veinte, se equivocan, a pesar del *«primer teorema»* de Gödel (Quine, *Método de Lógica*, 1955), en que este cálculo no es consistente.

Propone una solución alternativa de una «*lógica amable*», menos violenta, que no parece alcanzar el menor éxito debido al *principio de inercia* propio de la *estructura del lenguaje* (Lacan, Aún, p.100, Seuil, 1975, París), a pesar del espíritu científico de la mayoría.

Además, psicoanalistas franceses, absolutamente desprovistos dentro de la corriente psicoanalítica actual, invitaron a Hintikka a un coloquio en París a raíz de mis comentarios, cuidando que yo estuviera ausente en esa fecha, de donde él partió decepcionado, vista la inanidad de las exposiciones presentadas.

Es un hecho que esta gente no busca más que impedir que tenga lugar el menor debate, mediante sus gesticulaciones ridículas, con el fin de proteger su corporativismo de sumisión al servicio de sus autoridades autoproclamadas, de *filosofía de molinero* y *medicina de harina*, que Lacan organizó para nosotros a fin de manipular a los regadores mientras afinábamos nuestra estrategia.

que los reemplaza con la ventaja de introducir un nuevo matema efectivo f(x) en lugar de y, donde la letra de la relación Φ está ausente por el hecho de desaparecer en la letra de la función f.

Podemos escribir en lógica

$\forall x \ \forall y \ [\Phi(x, y) \Rightarrow E(y)] \Leftrightarrow \forall x \exists y \ [(\Phi(x, y) \wedge E(y)] \Leftrightarrow \forall x \ E(f(x))$

después de haber demostrado la primera equivalencia material como consecuencia de la conjunción de las dos condiciones propuestas para la introducción de nuevas letras como f.

Pues existe una tesis de la lógica clásica del Cálculo de los predicados cuantificados de primer orden que es deducible en este cálculo que designamos[5] como el sistema de escritura (S_1,T_1).

Tesis de lógica clásica

$$(\forall x \exists y \ \Phi(x, y) \wedge \forall x \ \forall y \ \forall y' \ [(\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, y')) \Rightarrow (y = y')])$$
$$\Rightarrow (\forall x \ \forall y[\Phi(x, y) \Rightarrow E(y)] \Leftrightarrow \forall x \ \exists y \ [(\Phi(x, y) \wedge E(y)])$$

De donde se establecen, no sin razón literal efectiva (de encadenamiento), las condiciones (1) y (2), para la equivalencia material de (a) y de (b) y su escritura común ahora mediante

(c) $\forall x \ E(f(x))$

para (a) o para (b).

Es el caso de los polinomios como $P(x) = ax^2 + bx + c$, funciones clásicas por excelencia del álgebra desde la invención del sistema de escritura de los números enteros, dicho *sistema de numeración por posición*. Pero también de las funciones llamadas *trascendentes* como las funciones trigonométricas: sin(x), cos(x) y tg(x), o logarítmicas y exponenciales: Log x y e^x, cuyo argumento puede variar en virtud de la composición entre ellas y las funciones algebraicas más diversas construidas gracias a las operaciones algebraicas del producto y del cociente, así como de la extracción de raíz.

Y existen también *los objetos*, las letras de constantes, susceptibles de una construcción comparable, y el hecho de que una letra de función compuesta con una letra de constante sea una nueva letra de constante, para decir que todas ellas dependen de estas condiciones de construcción que tienen consecuencias que podemos estudiar.

Esto vale para la *Lógica* aún por venir o para la *Teoría de las categorías* construida con tanto rigor como en esta categoría de base que es la teoría de conjuntos de Cantor axiomatizada por Zermelo y Fraenkel. Los matemáticos son siempre construccionistas; resta el reconocimiento de los medios de construcción, a veces demasiado restrictivos, a veces demasiado flexibles. Construimos a continuación nuestra topología según criterios del mismo registro categórico .

En la medida en que estas disciplinas dan lugar a letras que podemos diferenciar. Existen los matemas de la lógica y los matemas matemáticos, de los cuales forman parte —y *solamente parte* — las letras de los formalistas (Hilbert) que escriben los conjuntos, los objetos de la teoría cantoriana.

Es decir que existen también otros matemas además de las letras antiguas (Aristóteles, Euclides y Eudoxo…), clásicas (Descartes, Desargues, Leibniz…), pero que no diremos

[5] De ahí nuestro cuidado en la construcción de « *la armazón lógica del lenguaje*», que está expuesta en varios anexos de nuestros trabajos de lógica accesibles en nuestra página electrónica y construida en nuestra obra **NONS.** *Lógica, teoría de conjuntos y topología general* (fascículo de resultados n.º 0), aún inédito.

intuicionistas, en la medida en que el debate entre formalismo e intuicionismo permanece como un producto restringido por la crítica trascendental de Kant.

Detenemos esta excursión para deducir de estos hechos literales algunas consecuencias cruciales para la historia de las ciencias, la práctica de la lógica contemporánea y de las matemáticas, pero sobre todo para una epistemología renovada que se desprende de Kant y de la tutela filosófica de la cual los matemáticos ya han comenzado a emanciparse.

3 - Condiciones y consecuencias políticas de estos juegos de escritura

Son *juegos*, pero son *juegos de escritura*.

Algunos matemáticos o epistemólogos se oponen a esta metáfora de las matemáticas como juegos. Se equivocan, pues, en este caso, importa reconocer que no sabemos gran cosa de la escritura, de la lectura y de la Palabra por efecto de lalengua y de las lenguas, por efecto de lo simbólico (el lenguaje) de estructura enigmática, «*austera y difícil*».

Algunos creen conocerla y dominarla, mientras que cada uno no hace más que ocultar aquello que no logra practicar y exhibir lo poco que ha conseguido superar. Esta fanfarronería de fanfarrones se produce en la estructura simbólica en cuestión, de la cual no sabemos más que una cosa cierta que *compromete nuestra responsabilidad*. Sabemos que es segregativa y debemos a esta segregación nuestra supervivencia como especie vertical de *parlettres* , el narcisismo. Guiñoles de la letra y marionetas del texto, ya antes de la letra, mientras continuamos, como nuestros ancestros más lejanos, obedeciendo al imperativo fálico del decir, de la Verdad, la potencia de la Palabra y de su Ley, tanto más presente cuanto más desconocida por quien habla y por quien oye, y que destruimos tanto más por desconocimiento.

1 - Números

La existencia de una biyección entre dos conjuntos produce una relación llamada de equipotencia o de congruencia entre los conjuntos. Esta relación entre conjuntos presenta un invariante a través de las biyecciones que la definen, el cual es designado como el cardinal de los conjuntos concernidos. El cardinal es constante entre conjuntos equipolentes o congruentes entre sí. El número de elementos de un conjunto será designado como el número cardinal del conjunto, pero aún no sabemos cuál es ese número en cada caso.

Aquí puede establecerse una diferencia: el número comienza en la escritura, a pesar de la congruencia, por el número ordinal, ya sea que proceda de su definición como conjunto ordinal o de los axiomas de Peano, un elemento primitivo y una función de sucesión, confirmando el conteo, el hecho de contar y, retroactivamente, el número cardinal.

Es una diferencia mayor, entre otras, entre la escritura y la Palabra. En la Palabra, la significación proviene del discurso, del ejercicio en acto de incorpóreos efectivos.

Los pobres psicoanalistas, incluso los más reputados hoy en día, no logran todavía, con la palabra «nominación» como medalla colgada del reverso del traje, desprenderse de la tutela, las genuflexiones y las incantaciones de la religión y de la filosofía en materia de nombre propio.

No hablemos de la ciencia en este dominio, aún no está al corriente. Desde Stuart Mill, Russell y Gardiner, podemos leer a Lévi-Strauss [6], quien introduce la solución. Pero es Lacan quien nos entrega la respuesta [7] entre los seminarios, de un modo bien remarcable, puesto que

[6] J. Lacan "ENCORE" (leçon du 9 janvier 1973 p. 36-37).
[7] J. Lacan «Aun» (lección del 9 de enero de 1973, pp. 36-37)

nos dice en la lección siguiente, en enero, que no tiene ganas de hacer su seminario. Pues no está satisfecho, no ha logrado decir que un nombre, al igual que una letra, es material [8], de recuperación, retomado de un discurso caído en desuso. De ahí la confusión a propósito de estos objetos de lo simbólico. Véase cómo esto se desliza en una cadena de cuatro [9].

El número, entonces, queda por estudiar a partir de ahí; no iremos más lejos hoy.
Tener en cuenta a Cantor, pero no solamente, permitiría quizá, en el psicoanálisis, a propósito del nombre, del nombre propio y de los Nombres del Padre y del padre, de decir menos tonterías, de piadosas ineptitudes de curas, de beaterías genuflexivas o incantatorias.

2 - El deleite del teorema que se enuncia de manera tan perfecta.

Teorema

Para toda aplicación biyectiva existe una aplicación recíproca biyectiva

Puede constatarse, en la definición de las biyecciones, inyectivas y sobreyectivas, que se encuentran los enunciados escritos de estas propiedades, los cuales muestran que es necesario remitirse al inicio, a la fuente, del lado del dominio llamado de definición: de los x y de los x'.

inyección = unicidad del objeto $\forall x \ \forall x' \ (f(x) = f(x') \Rightarrow (x = x'))$

suryección = existencia del objeto $\forall y \ \exists x \ (y = f(x))$

mientras que la definición de la función en tanto función, lo cual no es cualquier cosa, no cualquier correspondencia entre dominios D(x) e I(x), si la escribimos efectivamente como lo hemos hecho, podemos leer que es necesario remitirse a la llegada, al fin, del lado del dominio imagen: de los y y de los y'.

existencia del objeto imagen $\forall x \exists y \ \varphi (x, y)$

unicidad de este objeto imagen $\forall x \ \forall y \ \forall y' [(\varphi (x, y) \wedge \varphi (x, y')) \Rightarrow (y = y')]$

donde las condiciones son literalmente simétricas, lo cual permite entender que el hecho de haber descuidado, como si fuera evidente, la definición de la función, es de allí de donde el teorema de la función recíproca, que además es también biyectiva, parece caer del cielo, enigmático, en una trampa divina y deliciosa.

El aspecto biyectivo de la recíproca proviene de la definición de la función, y si la recíproca es una función, ello se debe a las propiedades que definen a la función en tanto biyectiva.

3 – Por fin el paraíso

Las biyecciones sobre un conjunto dado, cuando se componen entre sí, forman un grupo algebraico; es el paraíso que se baña en aceite. Ustedes componen estas funciones y obtienen también otras estructuras algebraicas regulares, además de las del grupo de composición.

El teorema de Lacan, relativo a lo real de los discursos que forman un grupo de composición de cuatro elementos, es divertido en la medida en que construye un juego de biyecciones que, sin embargo, produce una imposibilidad.

He ahí el interés del teorema: dice no allí donde los matemáticos idealistas dicen sí, todo gira bien.

---

[8] J. Lacan "R.S.I." (leçon du 13 mai 1975)

[9] J. Lacan «R.S.I.» (lección del 13 de mayo de 1975)

Pero este real, esta imposibilidad, ya no es misteriosa, puesto que el grupo gira bien mientras componemos las funciones entre sí, pero lo real que traba el asunto al introducirse como imposibilidad en un lugar tan paradisíaco proviene del hecho de que, sin que se note, el intento de componer de otro modo las biyecciones, por una suma por ejemplo, como es el caso aquí, $g(x) = f(x) + i(x)$, hace que f e i puedan ser biyecciones pero que su suma no lo sea, pues nada nos garantiza en las expresiones escritas tal resultado.

El compuesto por la suma $g(x) = f(x) + i(x)$ es una biyección si el número de elementos n elegido para la construcción es impar, dando lugar a un cálculo módulo impar $(4 \neq 0)$ módulo $n = 2k+1$ impar, que no produce pliegue como entre cuatro y cero en la congruencia módulo 2.

Retorno a la demostración, que no recurre a todas estas consideraciones, pero las introduce.

J.M.Vappereau Balvanera 11 de febrero de 2016