JEAN MICHEL VAPPEREAU

ESSAIM

El grupo fundamental del nudo

JEAN MICHEL VAPPEREAU

Traducción : Marta Julia Turchetto
Mónica Lidia Jacob

Fascículos de resultados N °1

ESSAIM

El grupo fundamental del nudo

Este manual ha sido realizado por un cartel de Topología en extensión . Cada uno efectuó un trabajo, cuyo producto es propio .

Alrededor de J.M. Vappereau quien ha concebido la obra , M. Bertheux se ocupó de la entrada de términos y cuestiones ; L. Descubes supervisó la redacción del texto . M Beri el trazado de los dibujos , P. Kirchofer la realización de la maqueta

Presentación de la serie de fascículos de resultados

1.

Nuestros fascículos de resultados toman al psicoanálisis en serio .La serie de nuestros resultados de topología en extensión será, sin duda, de alguna utilidad para quienes quieran trabajar en este campo.

Tomamos la expresión "fascículos de resultados", del equipo Bourbaki [2] [1] .Los matemáticos de este grupo desarrollan la construcción de las matemáticas a partir de los términos de la teoría de conjuntos. En el modo de empleo de su tratado, que dividieron en libros, precisan la función de estos fascículos:

"A algunos Libros (ya publicados o en preparación) se les han anexado fascículos de resultados. Estos fascículos contienen lo esencial de las definiciones y de los resultados de los Libros, pero ninguna demostración".

Su tentativa presenta, respecto de la nuestra, una distinción que no debe prestarse a confusión; nuestros fascículos no son los anexos de ningún tratado de una envergadura comparable.

En una tentativa de construcción del psicoanálisis sobre el fundamento de la teoría de conjuntos, no disponemos sino de la obra de Freud, y de los Escritos de Lacan acompañados de su enseñanza de seminario.

2.

El psicoanálisis fue inventado por Freud, cuando descubre el Inconsciente. Esta invención fue acabada por Lacan — mediante un comentario del texto de Freud — quien lo somete a la prueba de su propia lógica.

Esta práctica se apoya sobre un método y produce un discurso.

3.

La práctica de Freud es muy simple en su principio, para quien se da cuenta de que la conversación pone en juego la mirada y la voz. Se trata , al inicio de un análisis, de aislar la voz en detrimento de la mirada.

La práctica de Lacan se inscribe en esta configuración. Él emprende el retorno a Freud, efectuando, en cada caso, una reversión lenta pero radical. La práctica de la estructura consiste en separar la voz, que es lo que hizo al final de su recorrido, para condensar su atención sobre la mirada, especialmente con sus dibujos de topología. La referencia al cross-cap, que es la estructura, es pasar por una línea sin puntos donde las dos caras se anudan y donde esta práctica se reduce a un corte.

Este punto de llegada irreductible de su doctrina, encuentra su realización práctica con las sesiones cortas, etapa necesaria.

Nuestro trayecto no es quedar pegado a este extremo, pero tampoco descuidarlo. Nuestro proyecto es retornar hacia Freud en la prolongación de ese movimiento que sigue siendo insuperable — la práctica se amplía — y "devenir lacaniano" consiste en estar más y más cerca de Freud.

---

[1] *Las cifras entre corchetes [] remiten a la bibliografía general situada al final del volumen*

El método es conocido por quienes estudian textos, pero, a menudo, es empleado sin éxito. El método psicoanalítico consiste en comparar dos versiones de un mismo texto, y, en tanto el discurso reposa sobre la hipótesis de una serie de traducciones que producen ciertos efectos, es preciso, disponer de numerosas versiones del texto en cuestión.

Consideramos, como preámbulo, que la topología es el argumento de un discurso, cuya última versión, la más avanzada, la más extrema, es ilegible sin aquella: es preciso compararla con otras. Esta fase topológica de la elaboración, es permanente en Lacan, en cada época de su enseñanza. No debería ser descuidada en las reseñas dirigidas al público, ni podría serlo en los efectos internos que produce.

4.

De Freud a Lacan, un cierto recorrido es acabado. El término "acabamiento" no significa el cese de la práctica, sino su perfeccionamiento a partir del punto de viraje en que la situación del psicoanálisis devino irreversible.

Desde entonces, ella se inscribe retroactivamente, en este doble giro producido por la obra de Freud y el comentario de Lacan.

Queda por establecer las series de lecturas que nos permitan dirigirnos hacia Freud, en este retorno iniciado por Lacan.

Que los observadores prudentes y los que han preferido quedarse en la largada se tranquilicen ; no hay riesgos de que haya otro fenómeno como el de Freud, ni otro fenómeno como el de Lacan. Ya no es más necesario en este campo. Por otra parte ¿quién desearía asegurar esta función, desde entonces ya cumplimentada, a menos que nos dejáramos deslizar por la pendiente del mimetismo y sin resultados? .Hoy, las dificultades son de otro orden.

5.

La costura del lugar del sujeto está, desde entonces, acabada. Ella obtura esa hiancia cuya abertura ,Freud y luego Lacan, preservaron ; y no es necesario preservarla otra vez. El doble bucle dicho por Freud y Lacan está cumplido y sigue el advenimiento de Canrobert [10f. p.11] aunque esta no sea una etiqueta en uso. Nuestros resultados participan de un nuevo estilo de lectura, cuyo alcance matemático es el de ir más allá de los intereses corporativos.

Un desfasaje [2] entre el rango de un término y su índice, constituye siempre la dificultad mayor en el estudio de una serie matemática. Los términos de una serie están indexados por el conjunto de los números llamados naturales. Este conjunto comienza por el número cero.

El número uno no es el primero, hay siempre un elemento antes del uno. Así, a propósito de esta lógica , produciremos un fascículo cero, a fin de situarnos en la continuación de esta serie.

Nuestros fascículos son seis:

n°0 NONS (la topología del sujeto)

[2] *décalage: diferencia, brecha, separación , defasaje*

n°1 ESSAIM (el grupo fundamental del nudo)
n°2 J'OUIS SENS (las superficies topológicas)
n°3 NUDO (el nudo borromeo)
n°4 Σ (nudos de cuatro ó más)
n°5 SYMPTOME (el nudo borromeo generalizado)

6.

Una dificultad para el psicoanálisis de hoy en día, puede resumirse así: es falso que no se quiera a la topología y es falso que se la desee. Esta situación es descripta por Lacan cuando compara el psicoanálisis con la arquitectura [10d]. Releva ahí una discordia entre una potencia lógica que aparenta en el discurso, y los fines utilitarios de los cuales se vale todo poder. No por inútil, es menos esencial.

Cuando se suprime del pensamiento la lógica clásica, quien se priva de esta imaginación, corre el riesgo de creer que no hay sino irracionalidad. Es como si se le retirara el salvavidas al aprendiz de nadador

Algunos querrían sustituir lo natural por lo artificial, sin tener en cuenta que no hay nada natural, para un ser que está sujeto a un doble narcisismo.

Así, los primeros psicoanalistas se dividieron respecto de estas cuestiones y sus contemporáneos, que ignoraban todo acerca de la lógica de los significantes articulados, de la posibilidad misma de una articulación, y, más aun, de las imposibilidades que de ella se deducen, cayeron a cada instante en sus trampas.

Para ellos, abandonar las categorías recibidas de la lógica, equivaldría a perder pie. Un primer paso hacia la verdad consiste en modificarlas; el estudio de los efectos de esa modificación misma, proporciona el auxilio que buscamos. Lacan comprendió esta necesidad retomando para el psicoanálisis, investigaciones inauguradas por otros (lingüistas, lógicos, matemáticos, etnólogos). El dotó al psicoanálisis de una topología del sujeto que lo liberó de las categorías clásicas y que no debería ser considerada como una disciplina auxiliar.

Aquellos de sus alumnos que adoptaron la tesis "débil" del carácter auxiliar de la topología, no la utilizaron durante largo tiempo y todos confesaron no hallarle utilidad ni en su práctica ni en sus informes. Hoy en día, somos pocos los que aún podemos hacer uso y práctica de una topología a la que sostenemos como una tesis más fuerte:

Es falso decir que " la topología es el psicoanálisis " y es falso decir que" la topología no es el psicoanálisis "

7.

Hemos intentado poner al alcance de los lectores las precisiones que están a nuestra disposición, cuando son necesarias.

El Dr. Lacan indicó las referencias necesarias, sin desarrollarlas en detalle. Sin duda, su auditorio habría tolerado mal ciertos desarrollos. No es que lo haya hecho para sí mismo como muchos pueden testimoniar. Se contentaba con usarlas siempre de maneras múltiples y pertinentes, con suficiente cuidado para que al seguir sus indicaciones se pudiese encontrar lo que sólo estaba anunciado. Muchos de los trabajos de explicitación en los dominios abordados está aún por hacerse, si bien hay ya algunos esbozos. Nuestra serie se propone ser más que un esbozo.

8.

Se trata de utilizar estas precisiones en la práctica para el trabajo de construcción del psicoanalista, el del objeto "a". Si esta tarea, que no es otra que la de Canrobert, se prosigue, saldrá de allí una clínica psicoanalítica producida por los propios interesados. Daremos, igualmente, indicaciones para quienes busquen razones para formarse en esta topología sin estar aún comprometidos en ella. Nos limitaremos a las ideas que deberían ser recibidas más fácilmente, guardando las novedades del descubrimiento para nuestra lectura. Esta lectura no puede ser inteligible sin la práctica del matema topológico, al cual nos remitimos constantemente.

De esta topología, otros pueden extraer otros resultados .Tenemos, además, el testimonio de que aun quien le dedica sólo un momento, no deja de tener un retorno de su trabajo, si bien esta práctica no se hace sola.

Construimos esta topología del sujeto en una elaboración que compromete al sujeto, en la medida en que " conciencia sin ciencia, no es más que complicidad de ignorancia ".

El interés de nuestra serie de manuales se apoya también en la conexión con las matemáticas corrientes, coerción que nos hemos impuesto. Damos el componente algebraico clásico, es decir, elemental (Bourbaki), y en progreso, es decir, tal como está haciéndose en nuestro campo (P.Soury) , necesario para la lectura de Freud y de Lacan.

9.

.Hay tres capítulos topológicos en la enseñanza de Lacan, relacionados con tres tipos de variedades matemáticas: grafos (1953-1961), superficies (1961-1971), nudos (1972-1981. Definimos y desarrollamos estas nociones.

10.

Topología en extensión: definimos la topología en extensión, como Lietzmann habla de Topología explicativa (Anschauliche-visual)[11], pero nosotros acordamos mayor importancia a la lógica, dado que ella forma parte de nuestra topología de manera eminente y prestamos una atención especial al dibujo , al que establecemos como fórmulas matemáticas.

Resumamos nuestra propuesta en seis momentos que requieren ser distinguidos . Su confusión es a riesgo de engendrar dificultades.

1. *Es topológico, lo que proviene de estructuras específicas, llamadas topológicas y definidas por la topología general*

2.*Estas estructuras topológicas se encuentran en numerosos dominios matemáticos (lógica-teoría de conjuntos- álgebra- geometría –análisis funcional…) y aún otros.*

3. *La topología del sujeto es una topología descubierta en lógica, que se desarrolla tanto en geometría como fuera de ella.*

4. *Para avanzar en esta topología de manera intuitiva, es preciso practicarla en el sentido de una geometría según F.Klein [8]. Otro matemático, H.Weyl lo expresa* *así: "Cada vez que usted se ocupe de una entidad dotada de una estructura, trate de determinar el grupo de sus automorfismos" [21 p.140].*

***5.** La geometría moderna ha dado lugar a la estructura más general de las matemáticas: es la estructura de categoría.*

***6.** La topología general define una categoría entre otras.*

La geometría del yo se define por la geometría clásica (euclidiana y cartesiana). La topología del sujeto no excluye el hecho de que se sepa qué es una geometría desde 1872, momento de su acabamiento.

Nuestra obra matemática de referencia es la de E.E.Moise [16].Quizá algunos hallarán que hay demasiados resultados en esta colección Es que existe una resistencia que desvía toda prueba de certeza. Los resultados son falseados por el sólo hecho de ser registrados por los mismos interesados. Dos procedimientos permiten atravesar esta obstrucción.

• Uno consiste en aplicar un protocolo de experiencia y de registro dando lugar al funcionamiento. Por lo demás, este último está cada vez más sostenido por los que ya han sido producidos.

• El otro se resume en una comunicación de resultados con vistas a su discusión por quienquiera que sea, aun cuando sea externo al campo en cuestión.

Estas dos soluciones no se oponen más que para quienes sostienen la resistencia en la que se sustenta el malestar en la civilización. Para el resto, pueden ser emprendidas conjuntamente.

Plaisance
5 de julio 1985

Introducción
CADENA & LETRA

TOPOLOGIA DE LA LETRA Y TOPOLOGÍA DE LA CADENA
(posiciones de los resultados de esta obra en la construcción *del psicoanálisis)*

1.Articulación del inconsciente por la escritura

a)Necesidad de estudiar este tema

La articulación de la cadena y de la letra es importante porque da su razón a la relación de la letra y del significante ; es nuestro propósito mostrarlo . No insistimos sobre su incidencia práctica: las formaciones del inconsciente se presentan como efectos literales (sueños, lapsus, actos fallidos, síntomas).Esta literalidad está articulada por una cadena significante de la cual, sin embargo, se distingue . Esta articulación produce el objeto.

El objeto concreto de nuestro estudio es el objeto causa de deseo, es decir, el objeto a. Pero este producto difiere según los casos: lo que nos es dado , son las formaciones del inconsciente. El psicoanálisis está obligado a conocerlas en su particularidad, en el mayor número posible , a fin de extraer de estas pruebas y de sus comparaciones, lo que hay en ellas de universal .

No podemos recogerlas sino con la ayuda de una escritura .Para nuestra práctica el trazado interviene. Cuando se trata de comunicar elementos de un análisis ,es aún más necesario recurrir al testimonio escrito: con mas razón para los análisis pasados, único caso en donde el término de analizado conviene.

La escritura es un procedimiento inherente al sistema interno del aparato psíquico. Freud da cuenta de esto en toda su obra, desde las percepciones-signo de la carta 52 ,escrita a su amigo Fliess, hasta las representaciones de palabras de la segunda tópica. Es imposible hacer abstracción de un procedimiento gracias al cual, lo que es inconsciente adviene a la conciencia. Es necesario conocer su función, sus fallas y sus peligros [**6a, d**].

b) El prestigio de la escritura y la causa de su ascendiente sobre las formaciones del inconsciente.

Inconsciente y escritura son dos procesos solidarios. La única razón para estudiar el primero , es que está articulado por el segundo. El objeto causa de deseo está definido por la combinación de la percepción y de la percepción-signo (Wahrnemung - zeichen).Esta última, constituye principalmente la diferencia que hay entre un sueño y un delirio. Sin embargo, la escritura erudita se mezcla tan íntimamente con nuestra manera de pensar, de la cual es directriz, que termina por usurpar el rol principal. Se llega a dar tanto o más importancia a la representación clásica ,que a los hechos mismos. Es como si creyéramos que conviene proveerse de mapas de los lagos italianos para ir a visitar el Polo Norte.

Esta ilusión ha existido desde siempre y las opiniones corrientes que se divulgan sobre el inconsciente están contaminadas de ello . La topología del sujeto cumple una función ,comparable en psicoanálisis, a la de la fonología en lingüística. Pero , se impone una diferencia entre estas dos disciplinas , que distingue también la topología de la nosografía en psiquiatría (escritura de la enfermedad).La topología suple la ausencia de sistemas de escritura que convienen. No podría ser llamada próxima o distante de la experiencia porque la estructura que ella escribe constituye la experiencia misma. Eso sólo basta para mostrar cuanto, el sujeto es dependiente de la escritura.

Algunos hechos psicoanalíticos patentes escapan a menudo, por la ausencia de una escritura que convenga. El complejo de castración por ejemplo, es corrientemente confundido con un temor de mutilación. ¿Cómo relacionar esta configuración de manera concreta con la estructura de la falta en el Otro, es decir de la madre? Su imposibilidad en la escritura es la ausencia de un metalenguaje. Aun cuando el sujeto devenga psicoanalista y pueda dar cuenta de lo que ha sido analizado en su propio caso, helo aquí, siempre confrontado a esta estructura infranqueable y siempre sobrepasado por la función del falo. Localizar tal estructura es posible si le aplicamos un razonamiento que se apoye sobre una lógica formalizada gracias a escrituras matemáticas desde hace un siglo (Boole 1854).Nosotros podemos seguir el trazado de este imposible que va al extremo de esta prueba. Así, sin el recurso de esta escritura y el ejercicio de la lectura, permanecemos en el estado de descripción que elude su objeto.

El pequeño Hans arrastra a su padre y a Freud a un terreno donde los psicoanalistas, sin la topología ,siempre retroceden . Siendo psicoanalistas natos no pueden pretender tener la misma intuición que Freud. Les queda el matema enseñado por Lacan , que sí puede transmitirse , y del que se advierte que es una topología. Lacan propone el término de orografía (escritura de los relieves)

El inconsciente tiene una estructura dependiente de la de la escritura. Sin embargo el prestigio de las lógicas clásicas y antiguas nos impide concebirlo. Los primeros psicoanalistas y la mayoría de los que lo siguieron ,se equivocaron en esto a menudo . Algunos no hacen diferencia entre inconsciente e irracional. Y al leerlos se creería que su rol es el de llevar todas las cosas a razones chatas Existe otro medio de hacer comprender la necesidad de una escritura topológica; no sería sino poder leer a Freud. Tomemos por ejemplo el problema del Superyo; sabemos que esta instancia es a la vez el heredero del complejo de Edipo (viniendo entonces después), el prolonga el Ideal del yo, el cual permanece a partir de una primera identificación sin elección de objeto previa (entonces ,antes del Edipo).

¿Cómo articular correctamente el antes y el después, que se confunden y se distinguen? ¿Cómo decir bien la función del Superyo como pseudo-instancia moral y como causa de la delincuencia más corriente? De allí que exista la división para algunos, entre un buen y mal superyo, para otros entre un buen y un mal ideal del yo. El malo es además calificado de primario y el “bueno”, de secundario. (Estos valores heredados del vocabulario del psicoanálisis se perpetúan aún a pesar del comentario de Lacan).Para Freud lo que es primario no es primero. Lo que es primario surge de un proceso de pensamiento que no debe ser confundido con la percepción. La percepción es primera y se pone en concordancia con lo secundario de la conciencia donde se sitúa el fantasma fundamental al que no hay por qué ir a buscar en el fondo de una bolsa. Existe aquí un problema de escritura que no puede resolver la lógica clásica. Hoy en día , aún los lógicos esclarecidos confunden la razón y el tercero excluido. Nuestra topología enseña a no ser contradictoria, es decir inconsistente y muestra cómo producir una lógica comportando este Otro que no es sino modificación o, mejor dicho, modalidad de una lógica binaria.

¿Cómo se explica el prestigio de la razón clásica en el dominio que nos interesa?

1°)Las escrituras y los diagramas de la lógica matemática son bastante difíciles de asimilar en su uso.

2°) Parece ya suficiente, y más durable, restringirse a la lógica standard, que se contenta con reformular las lógicas de la antigüedad .

3°) La actividad erudita incrementa aun más, la importancia inmerecida de esta lógica. La nosografía psiquiátrica tiene sus diccionarios y su semiología; es el libro y por el libro que se enseña. Se termina olvidando que el sujeto habla antes de ser descripto.

4°) En fin, cuando hay desacuerdo entre los hechos y esta escritura, el debate es siempre difícil de zanjar , para quien no sea psicoanalista. Pero como éste no tiene voz ni voto, la nosografía lleva fatalmente las de ganar, porque toda solución que se reclame de ella , es más cómoda . Esta escritura se arroga allí , una importancia a la cual no tiene derecho.

c) Los sistemas de escritura de la lógica que utilizamos.

Dos sistemas de escritura lógica serán el objeto de nuestro estudio:

1°) La lógica clásica ha sido matematizada desde Boole y Frege en cálculo de proposiciones y cálculo de predicados. Estos lenguajes son suficientes para escribir la teoría de conjuntos y formalizar tanto lo verdadero como lo falso.

2°) La topología del sujeto. Consiste en producir un operador de interior; éste modifica la escritura precedente en una topología. Su meta es dar el producto de un efecto de palabra y formalizar la verdad.

El psicoanálisis se desarrolla sobre la base de estos dos sistemas de escritura que incluyen y comprenden su extensión en geometría topológica, con la teoría de las superficies y la teoría de nudos. Lo hemos dicho, la lógica escrita tiende a sustituir , en nuestro espíritu, al pensamiento: eso es verdadero para las dos escrituras. Pero esta tendencia es más fuerte en lo que concierne a la primera. Debemos al contrario, dar cuenta del inconsciente con la segunda siguiendo el efecto producido por la modificación de la que hablamos. Esta sustitución de la cual es preciso probar que es evanescente, no tiene las mismas consecuencias enojosas que las de la lógica erudita.

Podríamos estudiar las causas y los efectos del desacuerdo entre la grafía corrientemente empleada y el inconsciente; no lo haremos aquí y propondremos, desde ahora, un ejercicio práctico de lectura.

2. Ejercicio práctico de lectura de Lacan

Los dos términos de ***letra*** y ***cadena*** que ciernen el significante, provienen de una tratamiento que nuestra lógica intenta dar soporte . Se trata de una inversión radical, propia de la barra que separa estos dos términos.

Ubiquémonos en el intervalo, entre dos de los Escritos de Lacan donde el término de letra aparece en el enunciado del título de cada uno : se trata del seminario de “La carta robada “ y de “La instancia de la letra en el inconsciente “.

1. *Nuestro propósito se resume así:*

A. En el seminario sobre “la carta (***lettre)*** robada”, es la ***Letra*** la que forma el principio organizador de la ***cadena.***
B. En La instancia de la letra en el inconsciente es la ***Cadena significante*** la que regla la composición de unidades significantes hechas de ***letras.***

He aquí lo que es preciso demostrar.
En el intervalo, los dos términos han intercambiado su función con su inicial ,para facilitar la lectura.

$$\frac{\text{Letra}}{\text{cadena}} \qquad \frac{\text{Cadena}}{\text{letra}}$$

Con A, indexamos *el seminario de “la carta robada”* completada por su introducción y por el paréntesis llamado “de los paréntesis “.
Indexamos con B , *La instancia de la letra en el inconsciente*, que lleva por subtítulo *“la razón desde Freud “.* Esta racionalidad freudiana juega entre los dos Escritos, a propósito de la letra , a propósito de la cadena.

2. *Es preciso distinguir, en los dos casos, una letra minúscula de una mayúscula, a la manera como procede el matemático. [10 e.p.205]*

A. En el primer caso, como en el juego que evoca Poe, la Letra es tan grande que ocupa todo el lugar, de tal manera que no le veríamos si estuviera sobre un mapa geográfico, por ejemplo, en la escritura del nombre de una vasta región. Se distingue del juego de las pequeñas letras + y **– ;1,2,3;**$\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ luego **0,1,),(,** donde se agotan las anotaciones para seguir su encadenamiento .

B. En el segundo escrito, esta diferencia, se encuentra entre los dos pisos del algoritmo de De Saussure invertido por Lacan: $\frac{S}{s}$ que se lee: **S** mayúscula sobre **s** minúscula. El piso que está arriba de la barra determina al que está debajo.

3. *Dos momentos de la demostración se desprenden de nuestra lectura*

A. De nuestra lectura del primer escrito, retenemos una distinción entre una repetición primaria, donde dos tiempos son suficientes para volver necesaria la sucesión , y una repetición recurrente que puede prolongarse al infinito.

Aa - De la primera repetición, se deduce una transformación del esquema de la carta 52 de Freud a su amigo Fliess. Esta transformación da el esquema L de Lacan ; intenta anudar percepción y conciencia, como un antes y un después que coinciden.

Ab- A propósito de la segunda repetición, el trayecto de la Letra, que comanda la primera repetición, produce un grafo que organiza una serie de pequeñas letras (cadena L) . El grafo vale como sintaxis de un tal lenguaje artificial, hecho de letras minúsculas. Lo detallaremos en el primer tiempo de nuestra demostración.

B. Introducimos nuestra lectura del segundo texto subrayando en primer lugar los dos términos siguientes:

Ba. Será allí cuestión del pasaje o de la ausencia de pasaje de la barra , del significante al significado, sin considerar la significación. Esta barra es horizontal, como la que parte antes /después es vertical : se produce entonces un cuarto de giro entre estos dos pares de oposiciones. Retomaremos esta cuestión a continuación.

Bb. El significante está articulado según el modo bien conocido del matemático que da lugar al lenguaje de categorías. Consiste en dar objetos (letras) y morfismos, relaciones, flechas o transformaciones (cadenas). Esto, como en toda geometría desde que F. Klein lo hizo notar en su programa de Erlangen. Nosotros lo detallaremos en el segundo tiempo de nuestra demostración. Este fascículo de resultados n°1 trata esencialmente esta articulación.

La noción de categoría pone el acento sobre “ las acciones y las pasiones “ más que sobre las descripciones de la estructura; debemos ubicarnos entre los dos *textos* de Lacan. Uno está dado por un escrito pero no el otro , en el sentido de su autor, habida cuenta el rol que juega para cada uno de ellos ese factor de discurso que es el texto.

4. *El alcance de tal construcción es considerable.*

El pasaje de la barra, correlato de una repetición inaugural, nos da la razón de esta demostración que puede ir en lógica hasta el intercambio de coerciones, sin perjudicar la consistencia del conjunto (operación ciertamente ilegítima en la lógica clásica tal como nosotros lo subrayamos[14, p.309].

Si el lector se fía solamente de lo que el significante dice, si se atiene solamente a su significación, no tiene hay ninguna necesidad de preocuparse ni por la topología , ni siquiera por la definición del significante . Al contrario, cuando el sentido, los intentos de interpretación no bastan para levantar una dificultad a la que el sujeto está confrontado , y que se repite y vuelve siempre al mismo lugar , entonces la topología puede ser de algún alcance . *Ella responde a la cuestión de estructura que plantea el mantenimiento de la represión , a pesar de la toma de conciencia de lo reprimido*, en tanto que no hay allí otra salida más que la de cambiar la estructura para la prueba de una modificación .

Según esta línea *inaugurada* por Freud ,Lacan introduce la topología en el campo freudiano. Ella permite tratar la repetición a fin de dar cuenta de esta memoria simbólica . La reservamos para nuestros ejercicios de lectura de Freud a Lacan [20 a].Nos contentaremos con desarrollar la correspondencia entre grafo y letras, puesto que es hacia esto que apunta esta construcción. El problema de los puentes de Köenigsberg nos preparará para ello.

¿Cuáles son, en fin, las relaciones que mantienen letra, grafos, y cadenas? Mostraremos aquí ,que una estructura algebraica se impone : la estructura de grupo, que es ciertamente el ser matemático principal al cual podríamos prestar alguna atención, aún sin detenernos allí definitivamente.

Nos quedará dar la demostración de la inversión de la cual hablamos. desplegando dos momentos de la articulación significante tal como ha sido propuesta por el Dr. Lacan entre esos dos *Escritos.* Será demostrado que: Ab: el grafo vale por sintaxis. Y **Bb:** el significante está articulado según una estructura de categorías. Estos son dos momentos de la articulación significante.

Capítulo primero

LETRA & GRAFO

VISTAZO SOBRE LA HISTORIA DE LA TOPOLOGÍA

(Los puentes de Köenigsberg)

La ciencia que se constituyó alrededor de las dimensiones del espacio ha pasado por tres fases sucesivas antes de reconocer cuál es su verdadero y único objeto. Tales fases se encuentran en el conjunto del despliegue de las matemáticas.

1. Se comenzó por hacer lo que se llamó "geometría".

1a. Este estudio, inaugurado por los Griegos, está fundado sobre la lógica y está acompañado de una visión científica y desinteresada sobre los objetos del espacio; ella apunta a dar una exposición axiomática y deductiva. Este modo de exposición se impuso en los "elementos de Euclides".

1b. En este período, evidentemente, no se trata de topología de manera explícita; no obstante, ya son enunciados problemas ,topológicos por su estructura, tales como las paradojas de Zenón [3,9]. Ellos serán fermento para la topología futura .

2. A continuación apareció la geometría analítica.

2a. Al comienzo de la segunda vuelta de la metafísica occidental tuvo lugar, con Galileo, un renacimiento de la tradición euclidiana. Sin embargo, la geometría analítica está ligada al testimonio de Descartes, quien inició este movimiento científico cuyo acabamiento se produce en nuestros días. En esta geometría, problemas del espacio son transpuestos en álgebra de ecuaciones (polinomios, álgebra lineal). Paralelamente, Leibniz propondrá el término de "análisis situs", para nombrar la geometría de situación (o geometría de posición). Seguidamente, surgió un conflicto entre la geometría a la manera de Descartes y una geometría llamada sintética.

La oposición de estas dos geometrías gira alrededor del recurso o el rechazo a ubicar las figuras en un sistema de referencia en el espacio Por otra parte, se desarrolla la geometría proyectiva (descriptiva): aquella en la cual las transformaciones (proyecciones) no conservan la mayoría de las propiedades estudiadas en geometría euclidiana.

Determinar lo que concierne a la situación por un análisis de las propiedades internas de la figura, constituye el *análisis situs*. Su originalidad reside en el abandono de las preocupaciones métricas (medida), lo que puede parecer paradójico si nos atenemos a la geometría definida - como su nombre lo indica- por la manera de medir cualquier cosa.

stas investigaciones, junto con la geometría proyectiva, prepararon la geometría tal como la conocemos hoy. Pero, en este dominio, la geometría analítica está en falta en un punto: no es que esté ligada al álgebra en detrimento del dibujo, sino que se liga demasiado servilmente a un álgebra específica y reducida (álgebra clásica armónica) en detrimento de la estructura. El defecto en cuestión se reproduce en la etapa siguiente y persiste hasta hoy en la enseñanza general.

2b. Tomemos un ejemplo de problema cuya solución es contemporánea de este segundo período. Resolviendo el problema de los puentes de Köenigsberg [5], Euler aporta una primera respuesta a una cuestión perteneciente a la geometría de situación. Este problema sirve, en general, de introducción a la presentación de la topología [17]. Al exponerlo, no estaríamos haciendo más que respetar ese uso que devino clásico.

A.La formulación del problema

El sitio en el cual este primer problema fue planteado, es un lugar de paseo formado por una isla rodeada de un río que se divide en dos brazos cuyas orillas están unidas entre sí por siete puentes. He aquí el dibujo (fig. 1):

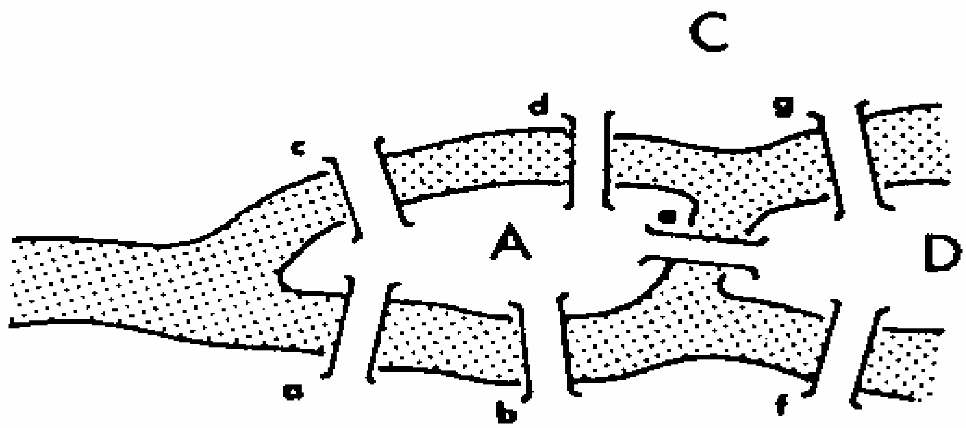


fig. 1

Llamamos a las zonas de tierra A, B, C, D. Los puentes se denotan con a, b, c, e, f, g (fig .1).

El problema consiste en decidir sobre la posibilidad de un paseo para un caminante que no deseara pasar por cada uno de los puentes más que una y sólo una vez. Notemos que para resolver nuestro problema no es preciso medir el territorio con un instrumento de medida.

Es suficiente saber contar hasta siete y marcar correctamente los datos. Es necesario encontrar un juego de escritura que convenga a esta situación. Euler emplea un juego de letras mayúsculas y de letras minúsculas en número apropiado. Más tarde, este problema dio nacimiento a un concepto de la teoría de grafos, pero no lo abordaremos sino en un segundo tiempo. Hacerlo ahora, sería proponer demasiado rápido una solución más reciente (el grafo euleriano). Volveremos sobre ello.

B. *La solución debida a Euler*

Es notable que Euler haya tratado este problema en el artículo que citamos sin recurrir a ningún grafo. Lo resolvió estudiando frases escritas con el vocabulario restringido de pequeñas y grandes letras que sirven para distinguir las regiones de terreno y los puentes.

Notemos que los pares de letras que marcan las regiones no le son suficientes para indicar el pasaje por un puente; intercala en ese par la letra minúscula del puente concernido y se interroga sobre frases de este tipo: C, d, A ,b ,B ,f, D, e A….

Si bien señaló que se podía anotar el pasaje de la región A a la región B (cruzando, sea el puente a, sea o el puente b) por el par de letras (A,B), él seguirá otra vía ligada a la formulación que adopta.

Su razonamiento le hizo construir situaciones teóricas que permiten asegurar la demostración de lemas preliminares.

Por ejemplo, en el caso más simple reproducido aquí, donde no hay más que un brazo de río atravesado por tantos puentes como se quiera:

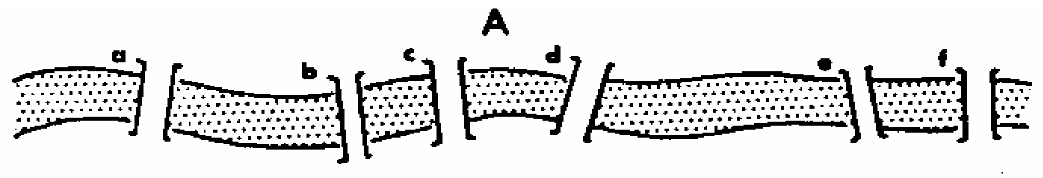


fig. 2

Luego, trata el problema en el caso general y mucho más complicado, donde hay múltiples brazos de río rodeando algunas islas ligadas por puentes en números variados:

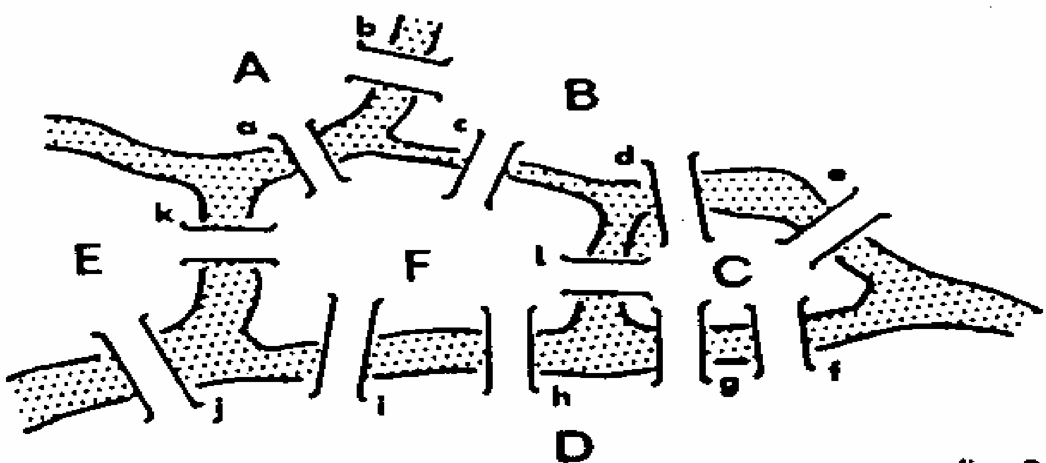


fig. 3

Euler llega a la solución que formula así:

"Cualquiera sea el caso propuesto se podrá muy fácilmente reconocer sobre el campo, por medio de la regla siguiente, si es posible o no ,el pasaje una y sólo una vez por cada puente.

Si hay más de dos regiones a las cuales conduce un número impar de puentes, se puede afirmar con certeza que tal pasaje es imposible. Pero, si se es conducido solamente a dos regiones por un número impar de puentes, el pasaje es posible pero comenzando su curso por una u otra de estas dos regiones. Finalmente, si no hay ninguna región a la cual se sea conducido por un número impar de puentes, el pasaje podrá realizarse como se desee, comenzando la marcha por la región que se quiera. Esta regla satisface, entonces, plenamente el problema propuesto".[5]

Como existe una solución más directa que podemos dar ahora, no proseguiremos el comentario de la solución de Euler. Su publicación presenta un interés que no es solo histórico sino, sobre todo, ejemplar por sus vacilaciones e interrogaciones en la elaboración de un método.

C .*La solución más reciente del problema*

Un grafo está hecho de puntos –llamados vértices- y de segmentos que unen estos vértices a los que se da el nombre de aristas.

He aquí el dibujo de un grafo constituido por 5 vértices y 7 aristas:

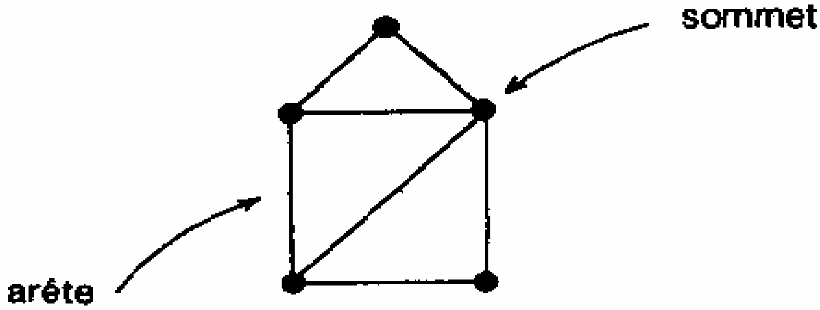


fig. 4

Arete (arista) sommet (vértice)

Un grafo, para ser llamado euleriano, debe presentar una característica en cuanto al camino que se puede recorrer siguiendo sus aristas. Es suficiente unir sus vértices en un trayecto continuo, es decir sin ruptura ni salto, sin levantar el lápiz por ejemplo

Notamos, para el lector ,que hacemos uso aquí, por primera vez, del término de *continuo*. Es preciso saber que este término define lo que concierne a la topología. Es a la *topología general* — todavía denominada *topología conjuntista* — a quien corresponde definir las aplicaciones continuas. Ella da, entonces, su marco a la topología en su conjunto. Las aplicaciones continuas dependen de la definición de los espacios topológicos, de lo que llamaremos una topología.[3] Esto, no se realizó en el tiempo del *análisis situs*, el de la resolución del problema de los puentes de Köenigsberg. Esa disciplina no llegó a constituir la verdadera topología pues *no se preocupó en despejar la naturaleza de su objeto de estudio.*

[3] Nons La topología del sujeto . Fascículo Nº 0 .

Este objeto no puede ser ceñido sino a partir de los invariantes preservados por transformaciones, aquí continuas, como en toda categoría de objetos matemáticos.

Estas nociones no serán descubiertas hasta más tarde. Para comenzar, no haremos más que un uso intuitivo del término de continuo (se trata de la arco-conexión) .

Retomemos la exposición de nuestra solución.

Un *camino euleriano* es tal que no se pasa más que una y sólo una vez por cada arista. El lector percibirá la proximidad de esta definición con el problema de los puentes; pero, allí, no hay aun solución.

Un grafo euleriano es un grafo que admite un camino euleriano.

Expresión condensada, que da la impresión de categorías muy robustas. Hemos tenido cuidado, sin embargo, de indicar las sucesivas remitencias que permiten remontarse hasta los axiomas.

Queda por traducir el problema de los puentes de Köenigsberg en una pregunta que tenga que ver con los grafos. Para ello, ubicamos un vértice en el lugar de cada letra mayúscula correspondiente a cada una de las regiones de terreno de nuestro sitio, y, una arista entre dos vértices para cada letra minúscula correspondiente a un puente.

Obtenemos el grafo siguiente:

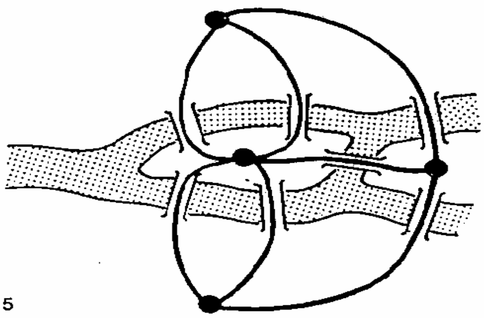


fig. 5

Así traducido el problema de los puentes de Köenigsberg deviene: (figura 6):

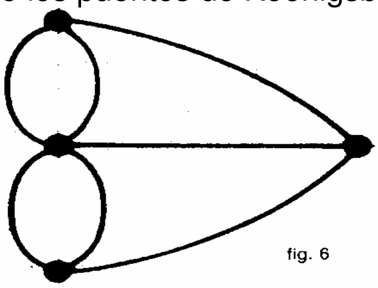


fig. 6

Este grafo (figura 6) ¿es euleriano?

D. *Cómo reconocer que un grafo es euleriano?*

Para reconocer que un grafo es euleriano, introducimos la noción de valencia, o de masa, ligada a cada vértice del grafo en cuestión.

Se trata del número de aristas adyacentes a este vértice. Es decir, del número de aristas que llegan o que parten de este punto.

He aquí los grafos precedentes (fig. 4 y 6) una vez valuados:

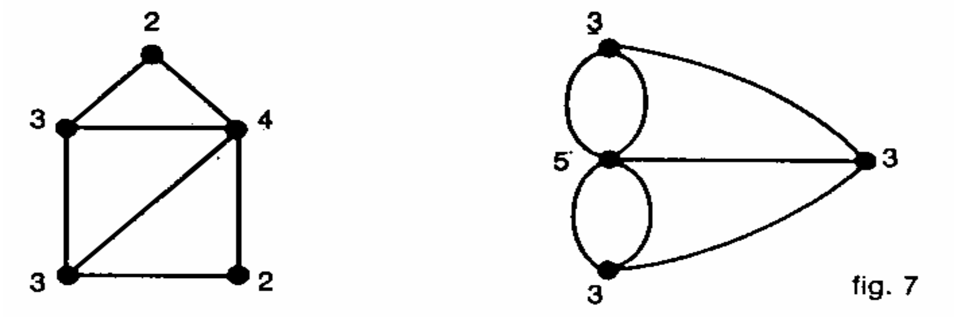


fig. 7

Con la ayuda de esta noción y sabiendo que para no ser detenidos en la realización de un camino euleriano es preciso, cuando se alcanza un vértice, poder volver a partir de allí, el lector comprenderá que los vértices de valencia par son más favorables.

Es preciso que no haya más de dos vértices de valencia impar para que se pueda realizar sobre un grafo ,un tal camino , y para que dicho grafo sea euleriano. [4].

Estos " a lo sumo dos " vértices de valencia impar deben ser tomados necesariamente , si ellos existen, como punto de partida y como punto de llegada , a fin de realizar un camino euleriano en este grafo.

El lector puede ejercitarse en verificar que el grafo tomado como ejemplo tiene ciertamente esta propiedad mientras que el grafo asociado al problema de los puentes de Köenigsberg , no la tiene . *El paseo deseado en esa ciudad no es realizable*, tal como lo ha demostrado Euler por otro razonamiento.

Los pocos ejemplos que hemos dado no están acompañados de demostración. Nos contentamos con dar los resultados que están suficientemente probados.

3. El tercer período.

3a. Comienza con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas. Esta fue la edad de oro de la geometría que finalizó con el "Programa de Erlangen" de Félix Klein (1872). Este programa [8] será el argumento del apéndice ubicado a continuación de nuestros resultados (p.99)

El mérito de la disertación de F. Klein fue desarrollar la idea de que una geometría es el estudio de los invariantes de un cierto grupo de transformación, y, por allí, provocar el abandono de las controversias estériles entre la tendencia sintética y la tendencia analítica.

A pesar de ello, el oscurantismo tradicionalista resurgió regularmente en un falso debate cuyos costos fueron pagados en su momento por la topología o la teoría de conjuntos. Parece que hubiera un sudor frío provocado por este aspecto de la estructura [5]

[4] - Nota sobre los grafos eulerianos
Hallamos, en teoría de grafos, una definición de los grafos eulerianos más exigente que la dada aquí. Ella exige, para que un grafo sea euleriano, que exista un ciclo euleriano, es decir, un camino cerrado que pase una y sólo una vez por cada arista. Esto da un teorema: un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos los vértices son de grado par. El paseo propuesto en Koenigsberg no reclamaba que este finalizara en el lugar donde había comenzado. Es por eso que nos atendremos a la definición dada en el texto.

[5] - Por más grandes que sean los servicios prestados por este matemático, dado que su abordaje iluminó el conjunto de la cuestión, no puede decirse que su punto de vista sea aceptado fuera del círculo de especialistas, responsables, sin duda de esta situación.

3b. Esta serie de fascículos consiste en presentar problemas y resultados de topología contemporáneos de este tercer período.

Félix Klein introdujo la noción de invariante. La geometría se resume en el estudio de invariantes euclidianos (métricos) o de invariantes cartesianos (polinómicos), por ejemplo. Gracias a esta noción ya no se ve en los otros aspectos del espacio, por ejemplo en los invariantes topológicos (continuidad), curiosidades complicadas o demasiado generales. Ellos pierden, así, su reputación de ser incomprensibles en tanto trastornan la intuición habitual dictada por las geometrías de la antigüedad o del mundo clásico.

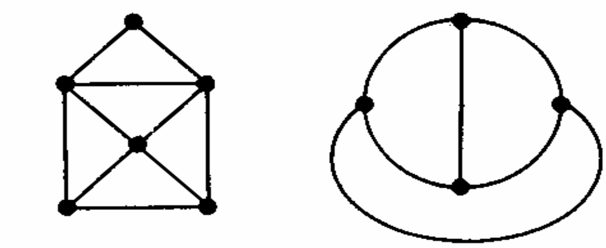
Félix Klein permite ver en la geometría una articulación producida por una categoría de relaciones. Por allí mismo, es posible comprender cuán insuficientes eran las ideas de las geometrías pasadas, aun cuando continúan siendo admirables cuando son consideradas en su propia coherencia.

Ejercicios

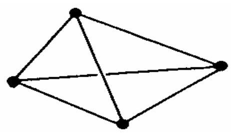
La topología exige una asimilación efectiva a fin de que su uso sea seriamente discutido. Es así que proponemos algunos ejemplos prácticos que apuntan a ejercitarse en ello.

Ejercicio 1: Podemos deducir de estas nociones un primer ejercicio para proponer al lector a fin de que verifique que ha asimilado estos rudimentos: trazar el grafo euleriano cuyo ejemplo dimos (fig. 4 y fig. 7) de un solo trazo sin levantar el lápiz.

Ejercicio 2: ¿Se puede hacer lo mismo en el caso de los grafos siguientes?



Ejercicio 3: ¿Podemos recorrer el grafo formado por un tetraedro (pirámide) según un camino euleriano?

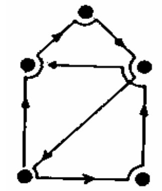


A modo de anécdota, en caso de ello que pudiera incitar a alguien a dar el paso, recordamos que el doctor Lacan no vacilaba jamás en volver a recorrer este

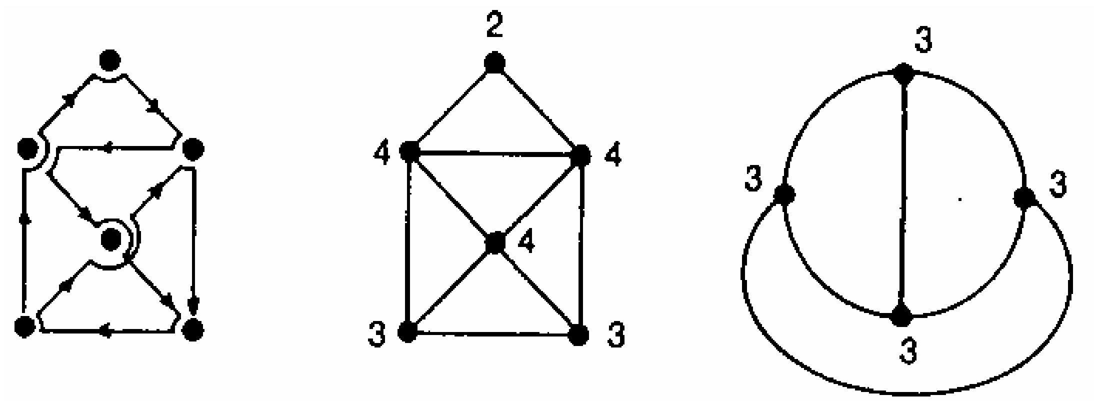
No hay más que notar el hecho de que, desde entonces, lo mejor que surge en cada generación reencuentra siempre la percepción de F. Klein. Abran "El pensamiento salvaje" de C. Levi-Strauss, en el capítulo 3 – los sistemas de transformaciones – o "Aspectos de la teoría sintáctica" de N. Chomsky, en el capítulo 3 – estructura profundas y transformaciones gramaticales- . ¿Se trata de simples juegos de palabras? Por el contrario, el conjunto de comentarios y enseñanzas que de allí se deducen ,quedan en reserva para cualquier momento problema cada vez que se presentaba. Podemos dar testimonio de ello por haber asistido muchas veces a esta reflexión, fuente, siempre, de renovadas sorpresas.

Correcciones:

Ejercicio 1: el dibujo de un trazo sin levantar el lápiz es realizable para el grafo de la figura 4 ; los valores pares están en número suficiente

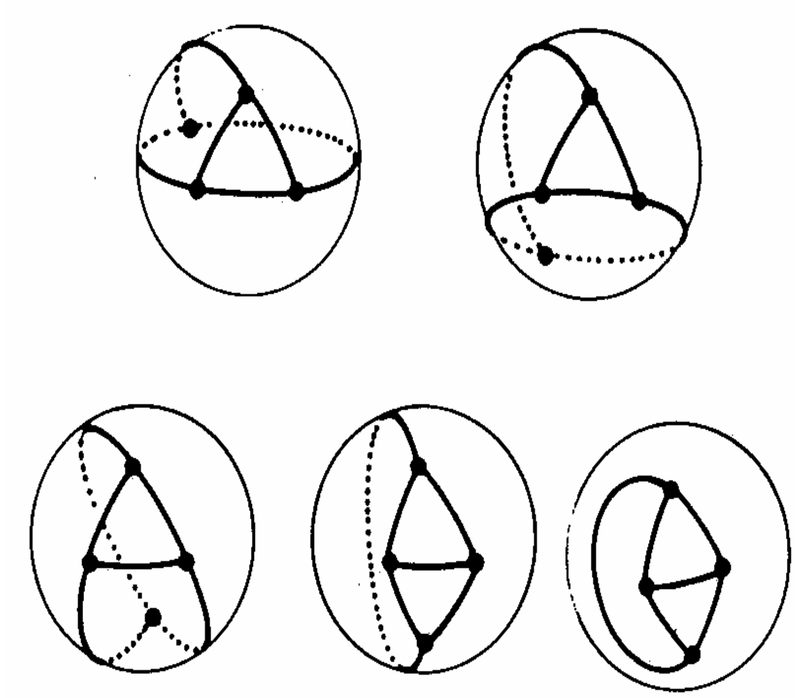


Ejercicio 2: la repuesta para el primero es *sí*. Para el segundo que sólo tiene valores impares, es *no*:



Ejercicio 3: La respuesta es no. El tetraedro sumergido en la superficie de una esfera da el grafo cuya presentación planar es provista por la segunda pregunta del ejercicio precedente, cuya respuesta es negativa.

La correspondencia entre la presentación espacial del tetraedro y su presentación planar, es mostrada con la ayuda de una esfera sobre la que está apoyado.



Capítulo II

LETRA & GRUPO

MATERIA Y TAREA DE LA TOPOLOGÍA DEL SUJETO; SUS RELACIONES CON LOS CÁLCULOS CONEXOS

(Uso aritmético de la estructura de grupo)

Nos parece difícil entender la doctrina del significante sin la lógica estirable de la cual decimos, con Lacan, que se trata de la topología del sujeto. Se trata, ciertamente, de una topología dado que se obtiene a partir de la lógica de Boole ,por adjunción de un operador de interior [6]

La materia de la topología del sujeto está constituida, primeramente, por series de letras, ya se trate de aquellas cuyo orden se resume en un grafo, tal como hemos visto; o bien, de aquellas cuyo orden se reduce a diversas estructuras algebraicas o topológicas. Estas son presentaciones axiomáticas de modos de composición de letras.

La estructura de grupo da lugar a tales composiciones, así que la estudiaremos en este capítulo. No es todo: varios registros se componen en ocasión de la articulación que podemos llamar significante. Nos damos cuenta de ello a través de sus agenciamientos. La tarea de la topología del sujeto será:

a) Aislar las cuestiones matemáticas, elementales en apariencia, que puedan suministrarle argumentos.
b) Esbozar las dimensiones cuyo obstáculo a la formalización da razón incluso de sus imposibilidades.
c) Delimitarse y definirse a sí misma.

La topología del sujeto tiene relaciones muy estrechas con otros desarrollos de las matemáticas, los cuales, tanto toman datos de ella, como se los proveen. Los límites que los separan aparecen siempre netamente.

Definiremos en un primer tiempo diferentes términos:

1. Grupo

Un grupo, en matemáticas, es un dominio que presenta una estructura algebraica.

La estructura de grupo, si bien puede ser conocida, amerita sin embargo que volvamos sobre ella. Recordamos sus axiomas en el anexo de este capítulo. Hacemos un uso particular de esta estructura, diferente de aquellos corrientemente empleados en matemáticas. Este se impone al seguir la curvatura de los efectos de letras. Ella nos permite, en consecuencia ,no acordar preferencias entre intuición literal e intuición espacial, y, además, preservar el pasaje de un registro a otro, a la vez que deja lugar a otras ocurrencias.

2. Estructura algebraica

Una estructura algebraica consiste en principios de cálculos. Como lo indica su etimología árabe, el álgebra es, antes de devenir ciencia literal, la ciencia del cálculo. Ella comporta por esto, y siempre, las nociones de coerciones y reducción. Cada una de sus estructuras está especificada por propiedades; ellas están dadas por axiomas (esquemas vacíos a llenar en cada caso).

Las estructuras algebraicas están siempre definidas *por* un tipo de objeto preciso: un dominio y una ley de composición. Sólo están definidas por axiomas: es decir que los axiomas varían con las estructuras.

[6] *NONS – La topología del sujeto – Fascículo de resultados Nº 0.*

Sus propiedades están ligadas a modos de composición de elementos Es preciso, preliminarmente, definir el dominio donde se efectúan las combinaciones y los medios para obtener el resultado de la composición.
Los matemáticos llaman a estos modos de composición, leyes.

Insistimos sobre la ley de composición y su dominio de efectuación propio. Esta ley, se llamaba anteriormente una operación (por ejemplo, la suma, el producto, en los dominios numéricos; pero la sustracción y el cociente se hallarán tratados de un modo diferente).

No es este el único sentido de la palabra estructura en matemáticas. En lógica, cada asignación de valor de verdad a las variables, será llamada estructura. Nuestro rumbo nos aproxima al uso lógico de la palabra estructura.

3. Uso aritmético de la estructura de grupo

El término “grupo” ,proviene menos de la aritmética (el estudio de los números) que de la teoría de la sustitución que se hace de la composición de las permutaciones, donde ella se reveló muy esclarecedora. Antes de abordar los efectos entre permutaciones elementales, la presentamos a partir de cálculos numéricos y de la resolución de ecuaciones simples,

Para nuestro uso inmediato, mostraremos la correlación que existe entre esta estructura algebraica y un modo de cálculo en un dominio numérico; luego, en un dominio literal.

En efecto, el calculista puede no saber fehacientemente que la posibilidad del cálculo depende siempre de una estructura algebraica. Nos apoyaremos sobre la intuición numérica del lector tomando ejemplos muy simples. El uso que haremos a continuación en cálculos locales, no superará ese grado de dificultad.

Sean por ejemplo dos números. Se quiere obtener un tercero que agregado al primero dé el segundo. Los comerciantes no vacilan en sustraer el primero al segundo porque no han olvidado aún lo que aprendieron de sus maestros sin ninguna demostración ,o bien , porque frecuentemente han hecho la experiencia de esta operación sobre números muy simples, o bien, en virtud de la demostración, a partir de los axiomas de la estructura de grupo. Pero, para números muy simples, no hay necesidad alguna de estos medios.

Por ejemplo: sean 3 y 7: no hay nadie que no vea que el tercer número que, agregado al primero, da 7, es 4; y esto mucho más claramente, pues de la diferencia que captamos de golpe — (uno intuitio) — entre el primero y el segundo, concluimos el tercero.

Este cálculo se llama en matemática resolver una ecuación: $x + 3 = 7$

Tal como acabamos de verlo, la solución es simple para quien sepa leer esta expresión. Ella reclama que se halle cuál es la x ,que agregada a 3 , da 7. Veremos así que el recurso a la estructura algebraica de grupo va a devenir indispensable en el caso de cálculo de pura literalidad, por ejemplo, en el caso que se formula: x + a = b

Demos ahora el cálculo de la solución de la primera ecuación ,que se presenta como una demostración en teoría de grupos. Cada etapa del cálculo debe estar justificada por el recurso a un axioma o a un teorema (ver el anexo de este capítulo II).

$$x + 3 = 7$$

$$x + 3 - 3 = 7 - 3$$ Existencia del elemento opuesto

$x + \quad 0 \quad = 7 - 3$ Definición del elemento opuesto

$x \quad = 7 - 3$ Definición del elemento neutro

$x \quad = 4$ Tabla de la ley de composición interna , en este caso la adición

El lector puede constatar que esta ecuación se ha resuelto gracias a la existencia de una estructura de grupo verificada por la adición en el conjunto de los números enteros.

Demos todavía un ejemplo, multiplicativo esta vez. Se trata de resolver la ecuación: 3 x = 12

Estamos obligados a ubicarnos en el conjunto de los números fraccionarios, a fin de asegurar estar seguros de la existencia del elemento simétrico de 3, llamado aquí su inverso $\frac{1}{3}$. Para este conjunto el cálculo - demostración se formula así:

$$3.x \quad = 12$$

$$3.x.\frac{1}{3} = 12.\frac{1}{3}$$ Existencia de un inverso

$$1.x \quad = \frac{12}{3}$$ Definición del elemento inverso

$$x \quad = \frac{12}{3}$$ Definición del elemento neutro

$$x \quad = 4$$ Tabla de multiplicación en el conjunto de los fraccionarios

Ahora viene el problema más delicado del cálculo literal. El mismo es efectuado sobre expresiones compuestas exclusivamente por letras y da lugar a la noción de grupo abstracto [1].

En este caso no nos ocupamos más del conocimiento de las tablas específicas de adición y de multiplicación entre números. La solución de la ecuación $x + a = b$ se escribe $x = b - a$ en virtud de los axiomas de la estructura de grupo. Si el dominio en el cual calculamos ,presenta esta estructura, existe un elemento simétrico para cada elemento . Entonces, para a, el elemento notado $-a$

Así :

$$x + a \quad = b$$

Deviene $$x + a - a = b - a$$

y por definición del elemento simétrico

$a - a = 0$; la suma de a y de $-a$ es igual al elemento neutro, notémosle aquí 0 $$x + \quad 0 \quad = b - a$$

La definición del elemento neutro es la de ser neutro: $x+0=x$. Ella permite no escribir este elemento. Reducimos nuestra expresión a:

$$x \qquad = b - a$$

Los cálculos a efectuar no serán más complicados en lo que concierne a la orientación que tomaremos.

Existe una dificultad para concebir estos cálculos de manera puramente literal. El pasaje de la aritmética al álgebra debe contribuir a adquirir una intuición algebraica que será una ayuda segura, en nuestra exploración de ese muy poco de intuición geométrica que hay alrededor de un nudo.

La intuición geométrica parece reducirse a una combinatoria algebraica a la que es posible plegarse, o no.

4. Relación de la topología del sujeto con los cálculos conexos

La topología del sujeto debe ser cuidadosamente distinguida de la lógica clásica (Booleana) y de la ciencia de los enunciados refutables (Popper) ,donde la verdad no interviene sino a título de verdadero. Conviene distinguirla también de la psicología, que puede ser considerada como una versión más reciente de la teología. Sin embargo, una cuestión original se plantea: si la topología trata de la cuestión del sujeto ¿es preciso, entonces, incorporarla a la filosofía? ; ¿qué relación existe entre la topología del sujeto y la filosofía?

En el fondo, el problema planteado es conexo al del acabamiento de la Metafísica; no puede ser comprendido sin ella ni sin su cesación.

Si la topología del sujeto cumple este acabamiento ¿acaso no hace cuerpo con aquello que esclarece? Cuestiones que no hacemos más que rozar aquí para retomarlas más adelante .

Las relaciones de la topología del sujeto con los cálculos, es decir, con el álgebra, no son tan difíciles de desbrozar: la relación es unilateral, en el sentido de que esta topología provee de problemas a la ciencia del cálculo, pero no le demanda ninguno. La confusión entre las dos disciplinas es imposible: lo esencial de las letras de el que habla es extraño al carácter elegante y económico de los cálculos algebraicos. Ejercitarse en sus rudimentos permite formarse en las nociones elementales que implican estos cálculos, a fin de aproximarse a lo que sigue.

Nuestro recurso a los dibujos de topología es para articular como construcción de matemas (elementos diferenciales últimos de las expresiones matemáticas). Ellos se prestan a cálculos, como las expresiones algebraicas dadas como ejemplos. Estos dibujos son símbolos abreviadores que condensan largas páginas de cálculos.

Con el dibujo se trata así de una otra economía que de la del cálculo. No es sin elegancia, aunque su recorrido no responde al mismo idealismo. Nuestra tesis está sostenida en esta proposición que dice: nuestros dibujos son aptos para ser leídos como fórmulas consistentes, es decir, donde no puede faltar ni una coma sin que ellas se deshagan. Es a afirmar esta frase, hacia donde llevamos al lector: el significante está articulado. Su estudio se produce del conjunto articulado de diferentes elementos en lugar de uno sólo.

Este difiere, entonces, de la consideración de individuos aislados en una descripción, en una taxonomía (clasificación). Aquí el álgebra se opone a las listas.

En cuanto a la geometría, ya hemos tomado posición: ella es netamente distinta de la topología a pesar de los puntos de contacto entre las dos disciplinas y de los servicios mutuos que se prestan. Volveremos sobre ello en el apéndice adjunto a este volumen (p.99)

¿Cuál es la utilidad de la topología del sujeto? Muy pocos tienen ideas claras al respecto; no es este el lugar para fijarlas. Es evidente, por ejemplo, que las cuestiones topológicas interesan a todos aquellos, historiadores, lingüistas, etc., que tienen que manejar textos. Más evidente aun es su importancia para la cultura general: en la vida de los individuos y de las sociedades, la estructura del lenguaje es un factor decisivo. Sería inaceptable que su estudio, permaneciese sólo como asunto de algunos especialistas; de hecho todo el mundo se ocupa, poco o mucho, de ello, pero –consecuencia paradojal del interés ligado a ello – no hay dominio donde hayan germinado tantas ideas absurdas prejuicios, espejismos, y ficciones.

Desde el punto de vista ideológico, estos errores no son despreciables.

La tarea de la topología es denunciarlos y disiparlos lo más completamente posible.

ANEXO AL CAPITULO II

Elementos de teoría de grupos

1. Axiomas de grupo

Hemos reunido aquí los axiomas de la estructura de grupo que encontraremos en su uso. Son ellos los que especifican esta estructura; ellos legislan sobre las *operaciones* que se efectúan en un *dominio.*

Un grupo es un par formado por un conjunto (notado por una letra G) y por una ley de composición *interna* a ese conjunto. Un par (X,Y) de elementos de G, se compone para escribir XY , elemento de G, sin prejuzgar del resultado de esta composición, otra cosa que no sea escribir como resultado la composición misma (concatenación de dos elementos)

Observemos que permanecemos en la formulación literal en la etapa correspondiente en el caso particular de una operación numérica a las expresiones $5+2$ *ó* 3×7 que la escritura literal no permite efectuar. Se percibe aquí la diferencia que hay entre el cálculo numérico y el álgebra.

El par así formado — es el conjunto G y la ley que actúa en él — verifica los axiomas de grupo que son:

- ***la ley es asociativa***: este axioma significa que cuando se conoce la ley que permite componer *dos* elementos, la composición de tres de ellos será definida según el mismo principio. La composición será efectuada por dos, luego su resultado será compuesto con el tercero. Dados 3 elementos cualesquiera X, Y y Z, para XY compuesto con Z o X compuesto con YZ. Antes que plantear el juego de paréntesis $(XY)Z = X(YZ)$ se podrá resumir este cálculo en un término que se escribe: XYZ

Una coerción habrá sido así *alivianada*

- La ley asegura la existencia de un *elemento neutro en el conjunto*

Este axioma significa que existe un elemento en el conjunto cuya composición con uno cualquiera de los otros elementos del conjunto da un resultado hecho de este otro elemento y de ninguna otra cosa. En cada caso las cosas suceden como si nada se hubiera producido. Si notamos con E este elemento neutro, su composición con cualquier X, da X, y se precisa en: $EX = XE = X$. Esta operación tiene un efecto de reducción.

- La ley es garantía de la existencia de un *elemento simétrico* pero esta vez, él es propio de cada elemento. En ocasión del elemento X, se trata de la existencia de un elemento que notamos X^{-1}. Este último se encuentra en el conjunto mismo, incluso si no sabemos de cuál se trata, y tal que, compuesto con X, da el elemento neutro (cuya existencia es anunciada por el axioma precedente). Así la composición XX^{-1} *o* $X^{-1}X$ puede reducirse a la escritura:

$X^{-1}X = XX^{-1} = E$ (el elemento simétrico es llamado: elemento opuesto, notado $-X$ para la adición; elemento inverso notado X^{-1} o $\frac{1}{X}$ para la multiplicación). Obtenemos una vez más un efecto de reducción.

El lector que no está familiarizado con estas nociones podrá descubrirlas o redescubrirlas en esta obra. En el apéndice que trata de la geometría de una manera definitiva, daremos la construcción de un tal grupo conforme a esta definición

En resumen, esta estructura ofrece la ventaja — en cuanto a las coerciones y reducciones que presenta — de ser bastante rica para producir una vasta teoría y bastante ligera para permitir que los cálculos sean fácilmente practicables en ella.

Para cerrar esta enumeración, es preciso prestar atención a una propiedad que muchos suelen agregar precipitadamente, *la conmutativa,* que no necesariamente forma parte de esta estructura. Este axioma define los grupos conmutativos (abelianos) cuya propiedad suplementaria dice que al componer dos letras según un orden X seguido de Y para dar XY, por ejemplo, el resultado será el mismo si se escriben estas letras en el orden inverso YX. Así $XY = YX$

Es difícil imaginar la facilidad introducida por esta propiedad suplementaria antes de haberla probado

Para las operaciones presentadas en este fascículo, los grupos que consideraremos no son conmutativos. Sin embargo, otro tipo de reducción va a remediar esta ausencia y volver practicables nuestras composiciones de letras. Se trata de los cocientes de grupo por añadido de relaciones (introducidos en la continuación de este anexo, serán de un uso esencial cuando tratemos de las superficies relativas a los nudos en el fascículo n°2).

Agreguemos aun la definición de las aplicaciones coherentes con la estructura de grupo. El lector descubrirá esta exigencia al final de este manual: consiste en acompañar cada objeto matemático con las aplicaciones que le son coherentes. Son las aplicaciones conjuntistas que ponen en correspondencia dos conjuntos que presentan esta estructura y que ponen en relación los elementos de tal manera que la imagen correspondiente del compuesto de dos de ellos, sea igual al compuesto de las imágenes correspondientes de esos dos elementos. Esto se resume entre dos grupos G y G'

$$f : G \to G'$$

A la fórmula $f(XY) = f(X).f(Y)$ a la cual se agrega $f(X^{-1}) = [f(X)]^{-1}$

Se dice entonces de esas aplicaciones, que ellas preservan la estructura de grupo. Son homomorfismos de grupo.

2. *Complemento de la teoría de grupos. Presentación de un grupo por generadores y relaciones*

(a) Generación

Al tomar un *montón de letras*, basta agregarle el montón de *sus inversas*. Esto se puede hacer, eligiendo un signo que denote para una letra, lo que en su inversa es X^{-1}.

Obtenemos necesariamente un grupo. Es *el grupo de palabras* que se puede escribir con estas letras y sus inversas.

El conjunto de palabras escritas gracias a este vocabulario (letras e inversas) forma un grupo para la *ley de composición* de palabras, que consiste en *escribir una a continuación de la otra*. Esta ley de concatenación (es el nombre de esta adjunción) da, para dos palabras, una nueva palabra compuesta, el compuesto de las dos palabras en cuestión.

Por ejemplo, con el vocabulario: $V = \{a, b\}$, le agregamos las inversas; entonces : $V' = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$

Formamos las dos palabras:

$b^{-1}abba^{-1}b$ y $baabba^{-1}b^{-1}$

A estas palabras, que son ya la concatenación de las letras del vocabulario, podemos también componerlas para obtener una tercera palabra, escribiéndolas una a continuación de la otra:

$$b^{-1}abba^{-1}bbaabba^{-1}b^{-1}$$

Para asegurarnos que se trata ciertamente de un grupo, basta señalar que la ausencia misma de paréntesis confirma el hecho de que la composición de las palabras entre ellas, puede hacerse de diferentes maneras (asociatividad), a condición de respetar el orden de las letras sobre la línea.

El elemento neutro es la ausencia de palabras. Esto permite borrar una letra y su inversa cuando ellas están una al lado de otra. Con el mismo vocabulario, b b^{-1} se borra en la composición de estas dos palabras,

bab y $b^{-1}aab$

O sea: $babb^{-1}aab$

Que puede escribirse $baaab$. Notaremos el elemento neutro $bb^{-1}=1$, pudiendo borrarse esta letra.

Las palabras inversas están hechas de las mismas letras que las de la palabra que ellas invierten, escribiendo las letras en orden inverso e invirtiendo su exponente.

La inversa de $b^{-1}aab$

es $b^{-1}a^{-1}a^{-1}b$

Pues $b^{-1}aabb^{-1}a^{-1}a^{-1}b=1$

en efecto, esta composición da:

$$b^{-1}aabb^{-1}a^{-1}a^{-1}b$$

o sea

$$b^{-1}(a(a(bb^{-1})a^{-1})a^{-1})b$$

$$b^{-1}(a(aa^{-1})a^{-1})b$$

$$b^{-1}(aa^{-1})b$$

$$b^{-1}b$$

Un tal grupo se llama un grupo libre; en el vocabulario de partida se lo llama los “generadores del grupo”.

A título de *Ejercicio*, se pueden resolver ecuaciones en este conjunto provisto de una estructura de grupo y responder a la pregunta: ¿qué palabra se debe agregar a $ab^{-1}aab^{-1}a$ para obtener $ba^{-1}b^{-1}aa$?

¿ Cuál es esta X, tal que: $X.ab^{-1}aab^{-1}a=ba^{-1}b^{-1}aa$?

La solución: $X=(ba^{-1}b^{-1}aa).(ab^{-1}aab^{-1}a)^{-1}$

$$X = (ba^{-1}b^{-1}aa).(a^{-1}ba^{-1}a^{-1}ba^{-1})$$
$$X = ba^{-1}b^{-1}a(aa^{-1})ba^{-1}a^{-1}ba^{-1}$$
$$X = ba^{-1}b^{-1}aba^{-1}a^{-1}ba^{-1}$$

b) *Relaciones*

Los grupos libres infinitos, presentan muy rápidamente una gran complejidad sintáctica. En cambio, dan lugar a la presentación de un grupo finito o infinito cualquiera. Encontramos más frecuentemente estos grupos libres en ocasión del cálculo en grupos menos vastos.

Las relaciones que caracterizarán más finamente una diversidad de grupo, pueden ser vistas como principios que simplifican los cálculos.

Demos la forma de una tal relación en el grupo libre de dos generadores: $V = \{a,b\}$, sea la relación $R{:}aba^{-1}b^{-1} = 1$

Esta notación está hecha de una palabra del grupo libre, que puede ser muy diversa y más o menos complicada, igualada de hecho en el grupo estudiado al elemento neutro.

La cifra 1 designa la palabra vacía y puede, en consecuencia, ser borrada. Algunas consideraciones no dejan de tener interés a propósito del elemento neutro y de las palabras vacías. Dejamos al lector el cuidado de reflexionar sobre ello.

$$babbaba^{-1}b^{-1}a$$

He aquí una palabra que tiene nueve letras en el grupo libre en cuestión. Si nos ubicamos en el grupo que admite la relación escrita arriba, se escribe:

$$babbaba^{-1}b^{-1}a = babb1a = babba$$

Esta palabra de nueve letras deviene una palabra de cinco letras. En efecto, esta palabra puede leerse con un paréntesis. La puesta entre paréntesis es de fácil uso para indicar la lectura, incluso si ella no es un elemento del grupo.

$$babb(aba^{-1}b^{-1})a = babba$$

Disponemos así la presentación de un grupo por generadores y relaciones. No discutimos los medios de obtener esta presentación para un grupo cualquiera. Sabemos solamente que con ella obtenemos un grupo.

***c) Cociente* (el grupo de Klein por ejemplo)**

El grupo, presentado a partir de un grupo libre, a condición de agregar allí relaciones, es el resultado de un cociente.

Por ejemplo, en el grupo libre de dos generadores, es decir el conjunto de las palabras construidas sobre el vocabulario $V = \{a,b\}$, si adjuntamos la relación tomada como ejemplo más arriba $(aba^{-1}b^{-1} = 1)$ y las dos relaciones

$(a^2=1 \quad y \quad b^2=1)$ obtenemos un grupo de 4 elementos cuya tabla de composición es la siguiente:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Este grupo es conocido con el nombre de" Grupo de Klein". Se trata del grupo no cíclico mas pequeño (un solo generador); su presentación por generadores y la relación será:

$$K=\{a,b / aba^{-1}b^{-1}=1 \ \wedge \ a^2=1 \ \wedge \ b^2=1\}$$

No queremos aquí avanzar más en el cálculo algebraico de los grupos pues el uso que haremos de ello no lo exige por el momento.

Dejamos al lector que conoce la teoría de grupos o que quisiera ejercitarse en ella, el cuidado de verificar que esta presentación por generadores y relaciones del grupo de Klein da exactamente la tabla exhibida.

Señalemos, simplemente, que la tabla comporta informaciones redundantes y que la presentación *por generadores y relaciones* es el modo más sucinto, pero necesario.

Podemos retenerlo aprovechando este modo de presentación.

d) El grafo de un grupo

De una manera apenas diferente a la hallada a propósito de los puentes de la ciudad de Köenigsberg, un tal juego de letras que es un grupo así presentado, puede ser representado por un grafo.

Es el grafo coloreado de Cayley, de un grupo.

Basta con atribuir un color a cada *generador,* luego anotar las *relaciones* como ciclos en el plano, es decir , trayectos cerrados partiendo de un punto dado ,para volver a él luego de un cierto número de pasos coloreados.

Este grafo representa también una geometría en el sentido en que la entendemos en el apéndice final. Presenta la particularidad de ser la acción del grupo sobre sí mismo; es uno de sus cocientes tal como se ha indicado; sin duda, se puede decir que es un cociente impropio.

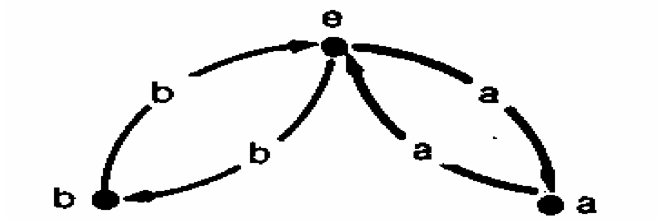
En los términos del apéndice (anexo al cap. 1), se trata de la acción de G sobre $G/\{e\}$ cuyo grafo podemos construir el grafo. Omitimos, simplemente, escribir otros elementos que no sean los generadores. En cambio, cada elemento aparece entre los objetos.

Para mayor facilidad demos el ejemplo de un tal grafo coloreado en el caso de un grupo finito. Tomemos el grupo de Klein que acabamos de ver.

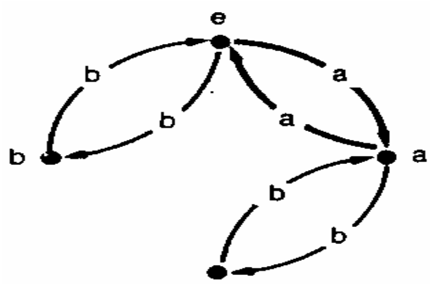
El grafo tiene tantos vértices como elementos distintos tiene el grupo. Partamos, entonces, de una multiplicidad de 4 puntos en nuestro ejemplo, apoyándonos sobre la tabla de composición de este grupo.

Tabla del grupo de Klein (ver p. 30)

Les relaciones $a^2 = 1$ y $b^2 = 1$ nos indican que las flechas coloreadas por la letra a y las flechas coloreadas por la letra b son sus propias inversas.

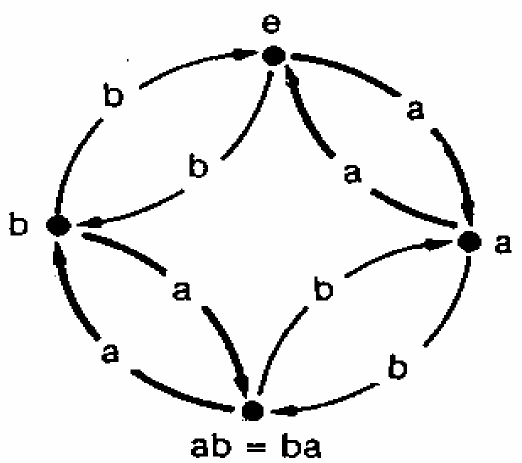


La tabla de composición nos indica que para ir de e [7], en tanto que elemento, al cuarto elemento notado ab, es necesario hace seguir a en tanto que flecha, de la flecha b.



ab

Igualmente podemos alcanzar el punto ab en este grupo conmutativo (primera relación) tomando el trayecto b seguido de a, partiendo de e.



Es el grafo coloreado del grupo de Klein

Este grafo coloreado por las letras generatrices es un esquema del grupo. Da una presentación de la estructura de grupo en tanto definida a partir de una ley de composición interna entre sus elementos, y muestra la acción, por el exterior, de la estructura de grupo sobre el conjunto de los elementos subyacentes. Esto explica la

[7] [NT] corrijo una errata del texto francés : dice a , en lugar de e .

doble ocurrencia en lugar de objeto y en lugar de flecha, de los únicos elementos generadores

Retomamos así, los grafos de los que habíamos partido para hacer una primera vuelta: un paseo por la teoría de los grupos.

e) Proponemos dos grupos cuyo grafo coloreado puede estudiar el lector

Serán utilizados en el apéndice de ese volumen.

Ejercicio 1: Obtener el grafo coloreado de Cayley del grupo de nuestra pequeña geometría (apéndice) cuya tabla ha sido dada (p.42), sabiendo que puede ser generado por dos y solamente dos de las transposiciones; su presentación tiene la forma de grupo abstracto.

$$S_3 = \{a, b / a^2 = 1 \wedge b^2 = 1 \wedge (ab)^3 = 1\}$$

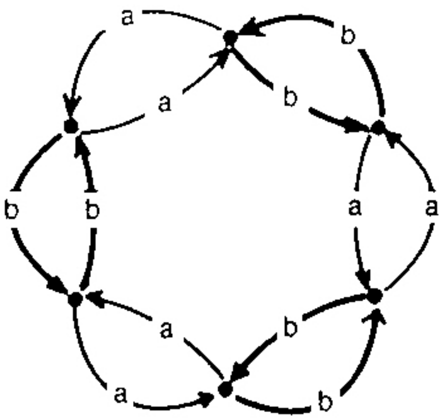
Ejercicio 2: el mismo ejercicio, para el grupo de la geometría cuya representación es pedida en el ejercicio de la página 161. Se trata de:

$$S_4 = \{a, b, c / a^2 = 1 \wedge b^2 = 1 \wedge c^2 = 1 \wedge (ab)^3 = 1 \wedge (ac)^2 = 1 \wedge (bc)^3 \wedge (abc)^4 = 1 = 1\}$$

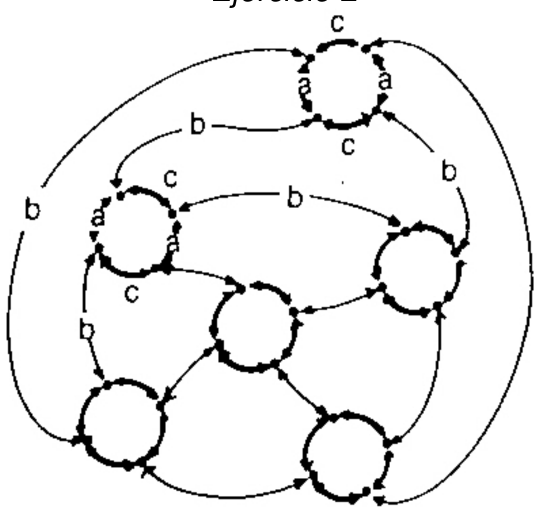
Este grupo tiene 24 elementos.

Soluciones de los ejercicios:

Ejercicio 1



Ejercicio 2



Capítulo III

GRAFO
LETRA CADENA
GRUPO

PRESENTACION DEL SIGNIFICANTE POR LA TOPOLOGÍA DEL NUDO

(la demostración de los resultados precedentemente anunciados)

La historia de la topología algebraica comienza por un paseo sobre los puentes de Koenigsberg. Puede ser tratada como un problema de palabras escritas con Letras mayúsculas y letras minúsculas. Este problema plantea , finalmente, una cuestión que compete a la teoría de grafos.

A. La articulación del significante, contemporánea de la introducción al seminario sobre “la carta (lettre) robada”

Cuando no se dispone de conocimientos previos, la presentación más accesible del uso de la topología en psicoanálisis se reduce al recurso a los grafos en el estudio de una sintaxis. El orden de los elementos constituyentes es esencial en la frase. La sintaxis es el estudio de estructuras de orden en los enunciados.

Desplegamos el primer momento de la demostración como la relación entre letras y grafos, a la manera de una gramática reducida , a un autómata- abstracto . Así desarrollamos el momento Ab (ver introducción p.11)

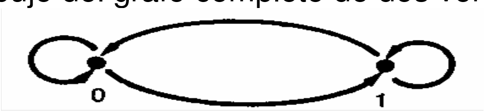
Ab. ¿Cómo un grafo puede formular una gramática?

Es suficiente considerar los paseos en el grafo. Hablaremos entonces de trayectos o de caminos, como es usual en teoría de grafos.

1/ Tomemos un ejemplo simple

Un grafo orientado completo, traza mediante aristas orientadas , todas las relaciones ordenadas entre sus vértices.

He aquí el dibujo del grafo completo de dos vértices:

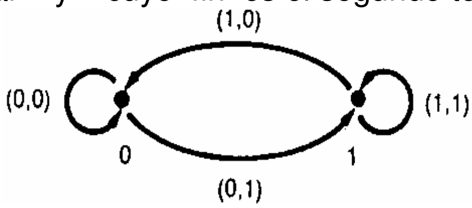


Podemos verificar que es completo dando la tabla de doble entrada que reúne las dos letras que sirven aquí para nombrar los dos vértices. Esta tabla indica todas las relaciones ordenadas:

	0	1
0	(0,0)	(0,1)
1	(1,0)	(1,1)

El grafo comporta una arista orientada para cada uno de los casos.

La arista orientada. que vale para cada par ordenado. es aquella cuya fuente es el primer término del par y cuyo fin es el segundo término del mismo par.



Con este grafo orientado completo estamos en presencia de una gramática trivial , casi demasiado general. Ella no impone ninguna exclusión entre todas las frases que pueden ser escritas con el vocabulario constituido por las dos letras que sirven para nombrar los vértices.

Anotemos este vocabulario $V = \{0,1\}$ con una expresión conjuntista.

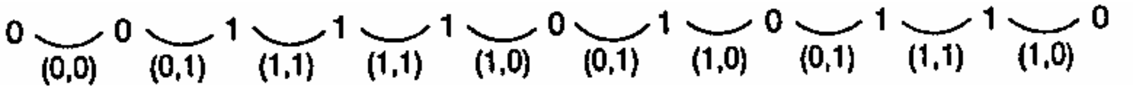
En efecto, cualquier frase del lenguaje más vasto que pudiéramos considerar con estos dos términos, puede estar representada por un trayecto en este grafo.

Notemos este lenguaje $V^* = \{0,1\}^*$. Está hecho de todas las secuencias finitas construidas con estas dos letras.

Tomemos un ejemplo de una de estas frases:

0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0

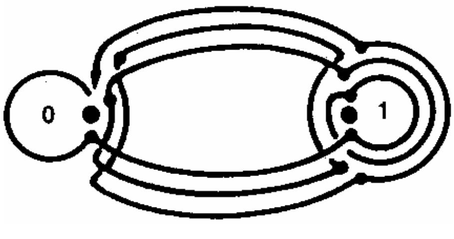
Puede ser descripta como una sucesión de pasajes ,en nuestro grafo, de un vértice a otro . Estos vértices pueden ser idénticos llegado el caso.



Estos pasajes son las aristas orientadas del grafo.

Podemos seguir el trayecto en cuestión haciéndolo recorrer por la punta de un lápiz que inscribe su trazo sobre el grafo.

Demos el trayecto correspondiente a nuestro ejemplo.



2/ Retiremos una arista a este grafo

Obtenemos otro grafo orientado. Él representa la sintaxis que caracteriza un lenguaje formal mucho más reducido. Aislamos así, un sublenguaje del precedente. En nuestro ejemplo retiramos la arista (1,0)

Este lenguaje, debido a la ausencia de esta arista, tiene una caracterización mucho más interesante. Comporta solamente tres tipos de frases, siempre formadas con las dos letras de nuestro vocabulario.

- Aquellas que sólo están formadas por cero en número finito

$$0000 \quad \ldots \; 0 \, .$$

- Aquellas formadas por tantos ceros como se quiera seguido de un número cualquiera de unos.

$$000\ldots0111\ldots1 .$$

- Aquellas que sólo están constituidas por unos.

$$111\ldots1$$

Podemos resumir esto diciendo que las frases de ese lenguaje, están todas hechas de un número cualquiera de ceros (incluyendo, ninguno) , seguidos a partir de cierto momento, de un número cualquiera de unos (incluyendo ninguno).
Esto se expresa con una notación conjuntista del tipo:

$$\left\{0^n 1^m \,/\, n \in \mathrm{N}_0 \wedge m \in \mathrm{N}_0\right\}$$

Esta noción de gramática, en tanto que coerción en el orden de la sucesión de los términos de una frase, formulada por un grafo, se halla en numerosos dominios.

A la inversa, toda coerción sintáctica no puede estar siempre dada por un tal formalismo. La lengua francesa no es un proceso de **estados finitos [4.a y b ,20.d]**

En relación con el campo descubierto por Freud, el cuento de Edgar A. Poe, “La carta robada” muestra que es vano perderse en la búsqueda de la comprensión, es decir, del sentido de los enunciados. Más que encontrar lo que el sujeto quiere decir a través de las pequeñas letras que él desgrana, se trata de encontrar allí un orden , independiente del valor que sé de a los elementos. Estos elementos no valen sino por sus oposiciones.

El sujeto, como el Rey en el cuento, no ve nada. Tampoco ve nada, igual que la policía, que recorta el espacio en partes tan finas como se quiera. La policía no encuentra la Carta (Lettre), ***cuyo poseedor no es jamás tomado en cuenta***. Solo Dupin, al tomar lugar en la serie de los personajes, puede, gracias a la sintaxis de sus roles, encontrar la Carta (Lettre). Ella equivale al elemento gramatical en una sintaxis repetitiva. Así, el psicoanalista puede hallar la función que tiene que cumplir a partir del orden cuya coerción sintáctica la Carta metaforiza .

La Lettre (Carta), aquí con una mayúscula, determina el grafo que define los órdenes admitidos o rechazados. Estamos en el registro de lo que gobierna la comedia: el significante que es el amo del juego, pero el amo puede allí estar ciego. En este escrito, la Lettre puede ser considerada como un significante.

¿Es la letra? ¿Es el grafo? Diremos que el significante está ceñido ,en tanto que debe ser tomado entre la Letra y la cadena **L.**

B. La articulación del significante, contemporánea de la instancia de la letra en el inconsciente

En la distinción necesaria entre Letras mayúsculas y letras minúsculas, son ahora estas ultimas las que vendrán a ocupar el lugar bajo el vocablo de letra

Desde un punto de vista histórico, de las Letras divinas a las letras del álgebra, así como del significante al significado, no hay relación biunívoca. En cambio, hay una determinación que sólo produce sentido por la traducción de un discurso en otro (su efecto acaba de ser estudiado), y, significación por el uso momentáneo en un discurso.

Entre los dos, cuando el discurso que da su significación a un término ha caído en desuso , y la traducción en otro discurso , aun no ha tenido lugar, se juega, del sujeto, una significancia que puede ir hasta la inversión de términos opuestos. Se trata de la instancia de la letra cuya demostración estamos tratando de efectuar, provee un ejemplo detallado. Ella define el pasaje de la barra o su permanencia.

Él calculo del grupo fundamental de una Cadena, principal resultado de este manual explicita el segundo momento **Bb.**

Bb. *El algoritmo de Saussure* $\frac{S}{s}$ *no sólo está planteado sino también articulado en el curso de lingüística general de F. de Saussure [10c, p. 501]*

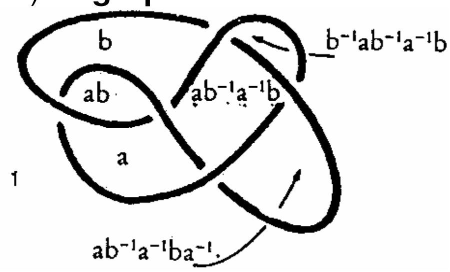
Esta articulación consiste en una doble condición impuesta a las unidades significantes. Esta doble condición remite a los elementos primeros sobre los cuales está construida una categoría matemática (ver apéndice II)

Los ***objetos*** son unidades significantes que se reducen a elementos diferenciales últimos (a la manera en la que un grupo algebraico se reduce a sus generadores). Son estos elementos indescomponibles llamados ***letras*** – presentan la estructura esencialmente localizada del significante. El ejemplo más notable de ello nos es dado por los fonemas de la fonología. Sabemos que gracias a ellos, los lingüistas recomponen la ***multiplicidad*** de los sonidos de cada lengua

Las ***flechas*** o morfismos de nuestra categoría son del orden de los principios de composición " donde se afirma la necesidad de un sustrato topológico" designado por el término de ***Cadena significante*** [10c,p502]

Así nos ubicamos, en ocasión de este primer fascículo, en esta categoría algebraica intermedia cuyos objetos son letras que forman grupos, y, las flechas, nudos.

Esta articulación significante da lugar, en el caso de cada cadena, en el caso de cada nudo, al marcado de zonas delimitadas por el aplanamiento de la cadena o del nudo. Estos cálculos se efectúan sobre el dibujo como lo muestra la figura siguiente. Estamos en la etapa que corresponde al cálculo de la valencia de los vértices de un grafo en la solución del problema de los puentes de Köenigsberg. Obtenemos así (capítulo V) el **grupo fundamental del nudo.**



Se presenta gracias a dos generadores y una relación

$$G=\{a,b/a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}=ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b\}$$

Y un dibujo cuyas zonas están provistas por palabras articuladas entre ellas por la estructura de este grupo.

Los nudos corresponden a las relaciones introducidas en grupos libres Resumimos esta situación, por el cuadro siguiente que remite al apéndice (capítulo II) donde toma lugar entre otros cuadros .

Cuadro 1:
La articulación del significante en la instancia de la letra

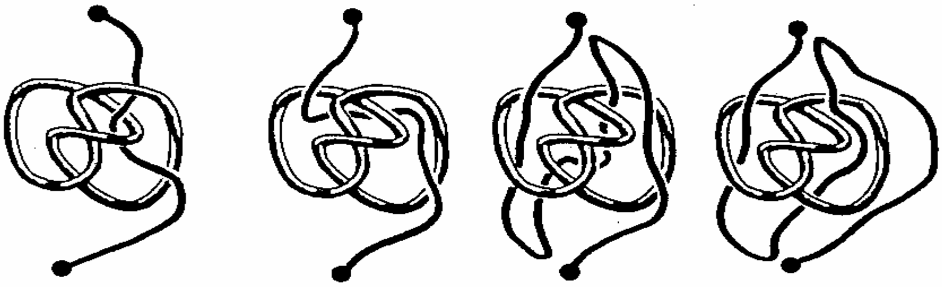
Categorías:	**nudo cadena**
Relaciones	**Nudos Cadenas**
Objetos	**letras**

CATEGORÍAS

GRUPO

En la presentación en términos de cadena y de nudo de la topología algebraica, estos elementos generadores son los trayectos elementales en los cuales podemos descomponer un trayecto cualquiera alrededor de la cadena o del nudo. He aquí un ejemplo:

Un trayecto pasando por la zona derecha, se descompone …



… en tres trayectos elementales (ver el grafo a continuación)

Nuestro propósito es presentar el grupo fundamental por un cálculo en los campos del nudo; él va explicitar esta articulación.

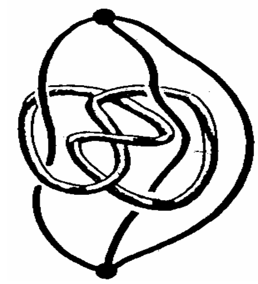
El objetivo de este manual es explicitar esta presentación. Cada trayecto elemental será escrito por una letra, siendo un trayecto cualquiera, escrito por una palabra.

C. **Coexistencia de las dos versiones de la articulación del Significante.**

Demos el conjunto de los términos en una presentación única que permita verificar la pertinencia de nuestra constatación: el intercambio de las funciones de los dos términos de letra y de cadena. La construcción conserva su coherencia deviniendo más precisa.

Los datos de una colección de redondeles dispuestos en un espacio (sumersión de círculos) produce según su situación mutua, una ley de composición de las letras y de las palabras que escriben los trayectos alrededor de la cadena o del nudo.

Podemos descomponer un trayecto alrededor de la cadena o del nudo en trayectos a lo largo de las aristas de un grafo ubicado en un mismo dibujo. Ese grafo está coercionado por el espacio circundante del nudo o de la cadena (variedad del nudo)



Es por intermedio de un tal grafo que podemos mostrar la equivalencia de las diferentes presentaciones del grupo fundamental. La más conocida es la llamada “presentación de Wirtinger”, que tomaremos a continuación y es próxima a la “presentación de Dehn” que hemos mejorado a partir de nuestras conversaciones con Pierre Soury [1].

Este dibujo muestra el grafo en una relación de dualidad con la cadena de esta nueva formulación. Es decir que ellos se entrelazan mutuamente por suplementariedad (ver anexo al presente capítulo) para tener esta función sobre las letras que ellos organizan según las leyes de un orden cerrado, aquí la ley de grupo.

En el comentario del Escrito que precede, la función de coerción sintáctica ha sido representada por trayectos siguiendo recorridos en un grafo. En la exposición que nos ocupa ahora esta función de coerción de composición deviene el grupo que puede sub-situarse al grafo.

$$\boxed{\frac{Letra}{cadena\ L}\ grafo = grupo\ \frac{Cadena}{letras}}$$

Este esquema resume las dos situaciones.

Esto vale tanto para el orden en la concatenación de los elementos generadores como para las transformaciones entre las unidades significantes (las palabras construidas con el vocabulario de letras).

Este grafo se homologa a la presentación de una cadena o de un nudo. De la misma manera que el recorrido de la Letra determinaba el grafo, en este nuevo aspecto, la Cadena o el Nudo imponen la estructura de grupo.

La principal distinción entre estas dos presentaciones de la articulación significante entre cadena y letras, sea por intermedio de un grafo o por intermedio de un grupo, reside en la diferencia de las estructuras formales obtenidas: las palabras que constituyen un lenguaje artificial no forman un grupo algebraico.

Se trata entonces de avanzar hacia una mayor exigencia de estructura habida cuenta del hecho de que aquellas han sido tomadas como ejemplo no podrían ser

[1] Desearíamos dedicar este primer fascículo Pierre Soury. Su amigo Michel Thomé encuentra que las dedicatorias son demasiado formales. Por nuestra parte, hemos citado a P. Soury cada vez que debíamos hacerlo

sistematizadas. Basta recordar que las estructuras algebraicas clásicas fueron puestas al día a partir del número.

Es, en cambio, hacia otra estructura que permanece elemental, a donde nos dirigimos: la topología del sujeto, que presentamos por otra parte[2], a partir de una lógica proposicional booleana, modificada en un reticulado de Boole topológico. Esta modificación se efectúa a la manera de las lógicas modales.

La estructura de categoría, muy general, resulta cómoda para orientarse a grandes rasgos en esta topología (ver apéndice)

D. Dualidad en topología

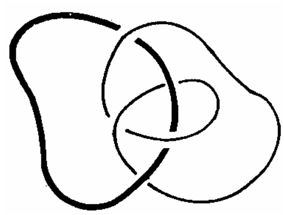
Cualquiera sea el álgebra en la cual recolectemos estas letras, si volvemos hacia el aspecto estético del problema, notamos que el nudo o la cadena modifican el espacio en el que están sumergidos.

Es a este título que son nudos o cadenas, pues en sí mismos como circulo o colección de círculos, no son más que círculos o colección de círculos

El nudo deforma el espacio; más aun el espacio deformado o informe revela el nudo. Revela que hay nudo, es decir, hay coerción suave, hay desbarajuste bajo este aspecto geométrico, orden (de gramática) bajo el aspecto algebraico. ***El nudo deforma un espacio de letras***. Esta expresión es sostenida por esta metáfora, de la deformación del espacio por el nudo. Es una manera de decir que el nudo tiene un efecto.

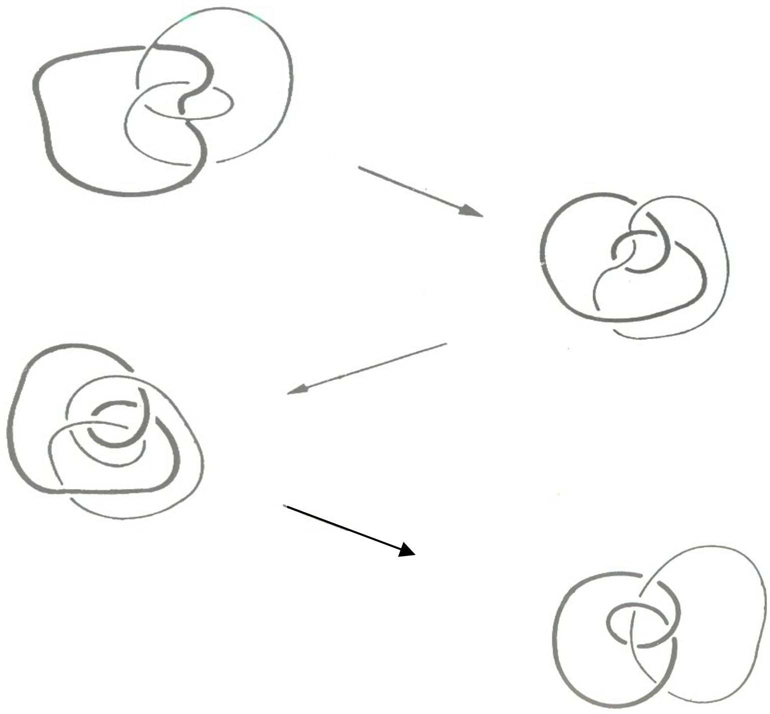
Un ejemplo simple tomado de la cadena de Whitehead, propone al respecto un uso si no en psicoanálisis, en lingüística

Tomemos un redondel plegado alrededor de un nudo que permanece redondel en una sumersión simple



Ustedes pueden deformar el redondel que se presenta como redondel, a fin de restituir al redondel anudado, su redondez, de tal manera que parezca desanudado

2 NONS- La topología del sujeto –Fascículo de resultados n° 0



¿Cuál de los dos redondeles lleva el nudo?

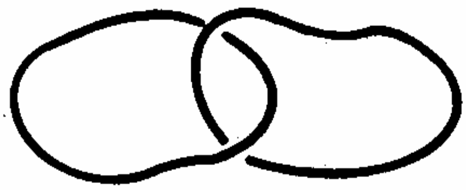
Esta pregunta es digna de alguien que practique el texto del TAO. “En antiguos tiempos, Tchouang-Tchéou, soñó que era una mariposa revoloteando feliz de su suerte e ignorando que era Tchéou mismo; bruscamente se despertó y se dio cuenta con sorpresa de que era Tchéou. Entonces, ya no supo más si era Tchéou soñando que era mariposa o una mariposa soñando que era Tchéou; entre él y la mariposa había una diferencia. Es la que llamamos el cambio de los seres” [19]

Anexo al capítulo III
La dualidad.

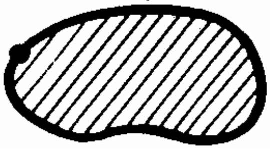
La ***dualidad*** que hemos señalado entre cadena y grafo y cadena y grupo no es una simple aproximación dado que se trata de una relación homóloga.

Él termino de ***dualidad*** indica siempre la inversión de un orden.

Demos un ejemplo simple extraído del dominio que estamos estudiando. Si lo confundimos en su simetría, corre el riesgo de parecer engañoso. No obstante, vamos a considerar dos anillos enlazados.



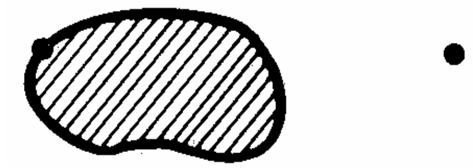
Una dualidad estricta se propone entre ellos. Podemos hacer del primero un grafo, es decir proveerlo de un punto, y luego tender sobre él una superficie cuyo borde es ese grafo, marcando así su amplitud



Podemos describir esta situación por una serie regular de dimensión:

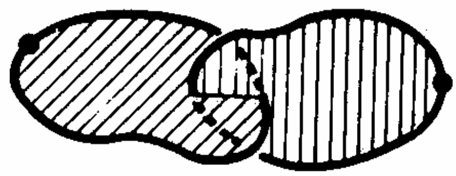
objeto	punto	línea	superficie	volumen
dimensión	0	1	2	3

La misma descripción se produce de manera dual .Al hacerle corresponder al espacio un punto.



A la superficie, una línea que la atraviesa.

A la línea (nuestro redondel) una superficie atravesada por esta línea



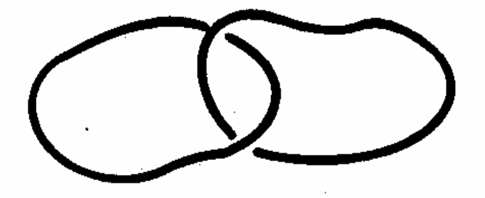
Queda, para finalizar, un espacio alrededor de la segunda construcción que corresponde al punto de la primera. Así, la relación dual se precisa en una tabla de correspondencias.

objeto	punto	línea	superficie	volumen
dimensión	0	1	2	3
	→	→	→	→
	←	←	←	←
dimensión	3	2	1	0
objeto	volumen	superficie	línea	punto

Los dos anillos de partida no retienen más que una parte. Ellos se sostienen en dualidad según una bipartición de este cuadro por la omisión de los puntos y de las superficies, persistiendo solamente las líneas y los espacios (volúmenes).

objeto	línea	volumen
dimensión	1	3
	→	→
	←	←
dimensión	3	1
objeto	volumen	línea

Reencontramos nuestra situación de partida a pesar de este olvido. Ella puede ser llamada dualidad



Capítulo IV

CADENA & GRUPO

LA TOPOLOGÍA DEL NUDO
(los trayectos alrededor del nudo)

El problema que vamos a aprender a resolver ahora, consiste en distinguir trayectos en la variedad de un nudo dado: trayectos que esquivan el nudo recorriendo el espacio que está alrededor.

Nos muniremos así, poco a poco, de trazos pertinentes que nos permitirán comentar esos trayectos.

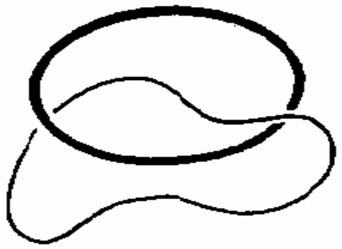
Debe notarse que el estudio de un nudo pasa por la consideración de lo que le es suplementario, de lo que está alrededor, por dualidad. El método que preconizamos a continuación , lleva a resolver otras cuestiones anexas.

Es esto lo que mostraremos más adelante mediante ejercicios, dando sus soluciones.

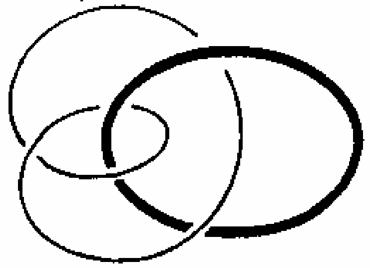
Proponemos al lector, en primer lugar, apreciar la dimensión del problema aquí planteado (dimensión que es, quizás, más vasta de lo que se pueda imaginar) considerando ejemplos variados de tales trayectos

1. Los trayectos alrededor de un redondel simple considerado como nudo

Un trayecto puede hacer un simple giro alrededor de un elemento de redondel



Un trayecto puede hacer varios giros, dos por ejemplo.



Así, este trayecto ¿es diferente del precedente? ¿Es específico? ¿En qué?

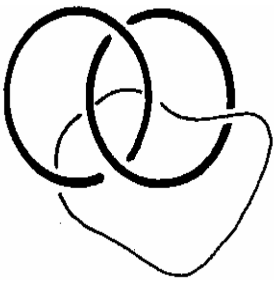
Un trayecto puede también efectuar un recorrido más complicado.

En vista de estos trayectos, se plantean algunas cuestiones. El trayecto ¿no es falsamente complicado? ¿Puede simplificarse, reducirse a un trayecto más simple? ¿Posee acaso, por el contrario, características singulares diferentes del número de giros hechos alrededor de un elemento redondel de base? ¿Puede hallarse un número limitado de trazos que darían cuenta de cada uno de estos trayectos? .

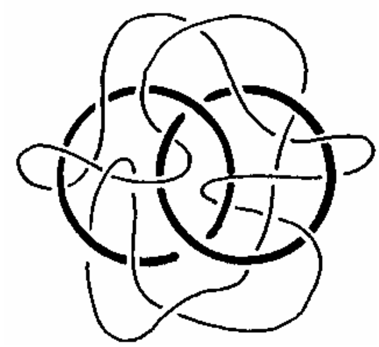
2 .Los trayectos alrededor de una cadena de dos redondeles [1]

He aquí un caso simple, que va devenir para nosotros elemental

[1] Empleamos el término de cadena para hablar de nudos encajados, aquellos constituidos por varios redondeles



Este es mucho más complicado



O, aun, puede imaginarse esta situación:

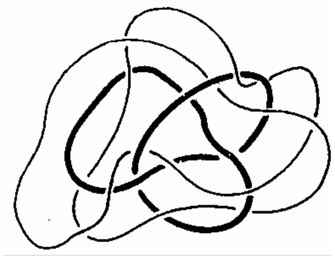
Esta es más sorprendente

Nuestro propósito en este capítulo central, será construir el buen punto de vista, aquel que permita ver de la manera más correcta y que haga aparecer, los trazos pertinentes a los cuales es necesario atenerse, a fin de dar cuenta efectivamente de todos los trayectos alrededor del nudo. Diríamos de buen grado que se trata de " un no-punto de vista "

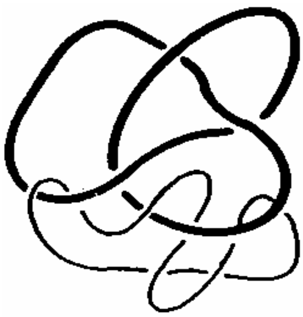
3. Los trayectos alrededor de un nudo menos trivial y para el más simple de entre ellos: el nudo trébol

Este trayecto parece de una extrema diversidad

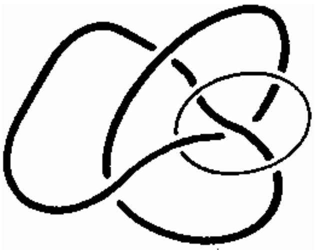
Este también



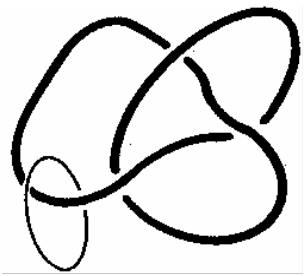
Existen evidentemente casos simples, incluso para los nudos más complicados.



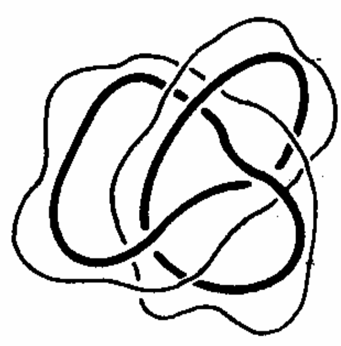
Podemos también considerar éste:



Podemos, a partir de ahora, hallar trayectos característicos como éste:



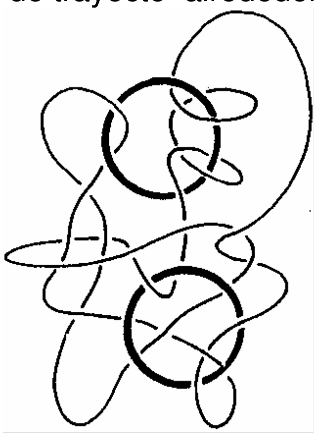
O, como aquel, que es llamado longitud del nudo:

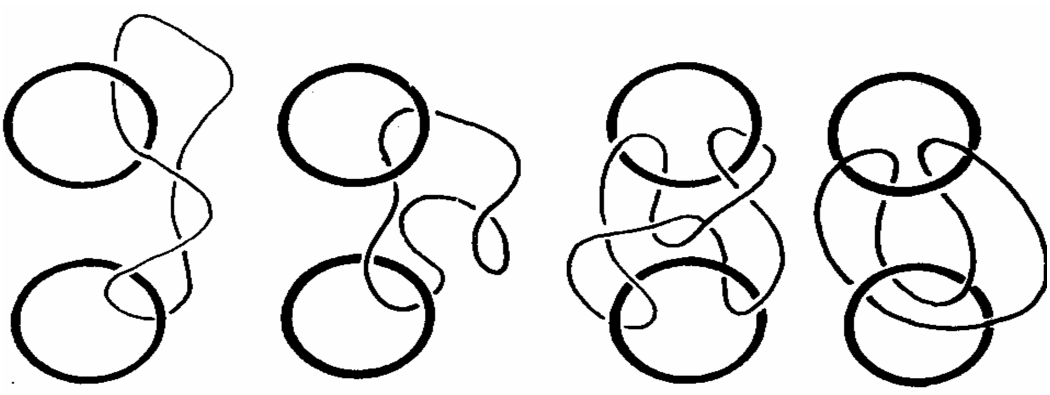


El lector notará que es, en primer lugar, difícil orientarse en estos diferentes casos, y las ventajas de una construcción que permita hacerlo.

4. Los trayectos alrededor de dos redondeles libres uno en relación al otro[2].

He aquí una posibilidad de trayecto alrededor de estos nudos





Otra posibilidad	No debe olvidarse este trayecto	Se puede considerar este, un poco más enredado	y finalmente este otro

5. Los trayectos alrededor del anudamiento empleado por Whithead

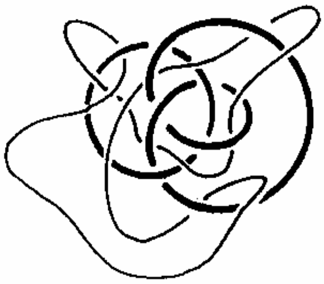
[2] Se dice también de dos redondeles libres que forman una cadena, pero esta es trivial.

(doble enlace)

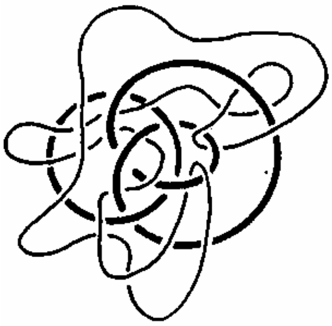
Un trayecto que pasa dos veces en el nudo:

Éste, más central:

Un trayecto que se enreda alrededor de este anudamiento:

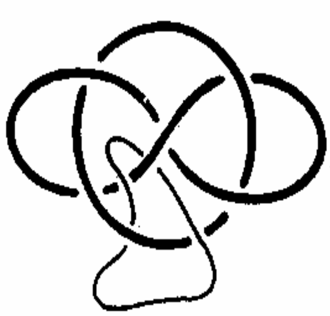


Y, finalmente, éste que parece muy complejo:

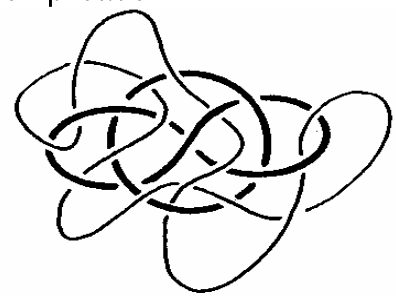


6. Los trayectos alrededor del nudo de Whitehead en su otra presentación

Un trayecto bastante directo:



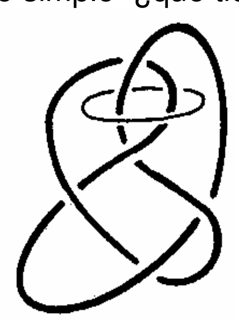
Otro, bastante complicado:



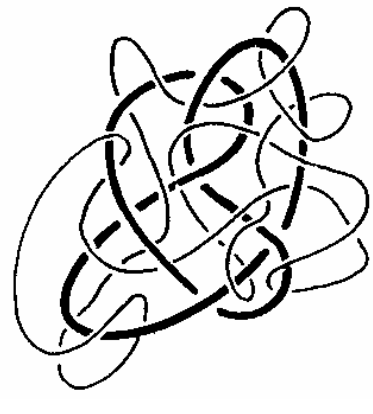
A fin de que el lector pueda ver bien desde ahora, la amplitud del problema que tratamos, damos además, algunos ejemplos sobre los que volveremos cuando debamos vérnoslas con esos trayectos.

7 Los trayectos alrededor del nudo de Lacan

Un trayecto bastante simple ¿que tiene de particular?



Un trayecto más complicado ¿Lo es verdaderamente?



El grupo fundamental , es así como los matemáticos nombran a este grupo, (ver bibliografía relativa al grupo fundamental al final del volumen) permite orientarse en diferentes trayectos alrededor de diferentes nudos.

Será, él mismo, un objeto matemático, puesto que se trata de transponer un problema, planteado aquí en geometría, en un problema algebraico.

Veremos las restricciones –pues, las hay – que aporta esta técnica en el desbrozamiento de la abundancia de estos trayectos .Y cuales son las razones que impiden trasponer de manera integral la topología en álgebra de manera plenamente satisfactoria (para esta razón ver p.71).

Capítulo V

CADENA & NUDO

PRINCIPIOS DE TOPOLOGÍA DEL NUDO

(El algoritmo solución de nuestro problema)

1. Las especies gráficas

El problema planteado se despliega en el volumen, en el espacio alrededor del nudo; los matemáticos lo llaman, su ***variedad.***

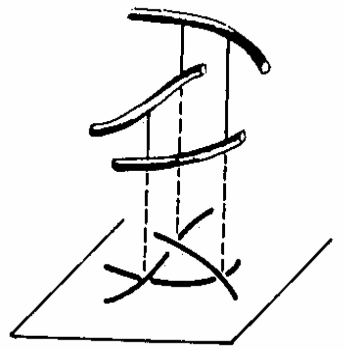
Nosotros practicamos la topología en bajas dimensiones: el nudo concierne a la diferencia entre una línea, de dimensión 1 y un espacio, de dimensión 3. Esta diferencia define la codimensión 2. Lo que queremos subrayar aquí, es que la tercera dimensión no necesita la dimensión 3. De allí que, remitimos nuestro problema, tanto como se puede al plano, de dimensión 2.

Nuestros dibujos ponen en imágenes , el volumen en el que se efectúa el trayecto alrededor del nudo; pero estos son aplanamientos. El aplanamiento es una comodidad; que sea efectivo mediando algunas precauciones, indica que nuestra topología se juega entre dos y tres dimensiones.

a) Del aplanamiento del nudo

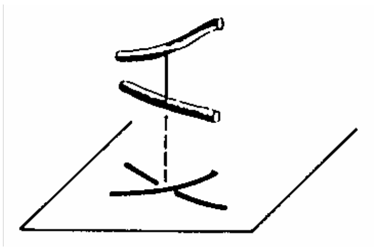
La restricción que acabamos de evocar no será perturbadora si mantenemos la distinción entre aplanamiento y puesta en plano; el aplanamiento es una proyección parcial del nudo que se asegura de dos particularidades:

1°: Tres puntos distintos del nudo, no tienen nunca la misma proyección.

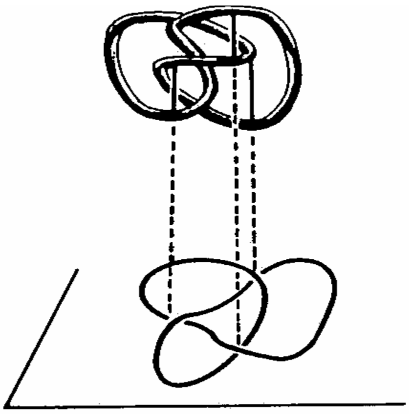


En este ejemplo, en tres lugares, dos puntos como máximo tienen un mismo punto de proyección. Los otros puntos se proyectan unívocamente.

Para decirlo de otra manera, *a lo sumo* dos puntos, forman un cruzamiento. Sólo figura, el que está por arriba del otro; el elemento de redondel que está debajo ,aparece entonces interrumpido.



2° Los puntos, proyecciones de un único punto del nudo, forman arcos (curvas continuas) sin singularidades.



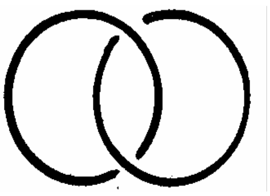
En matemática se llama a una tal proyección: “en posición general”.

El punto de proyección de dos puntos superpuestos da lugar a la cuestión esencial de los cruzamientos (sobrecruzamiento o subcruzamiento), más comúnmente designado por el par de oposición ***arriba –abajo***.

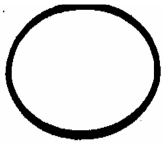
Es preciso imperativamente, preservar este matiz dado en el dibujo, por el trazado de una de las hebras del arco del nudo y la omisión de la otra. A la altura del cruzamiento, sólo dibujamos la hebra que pasa por arriba e interrumpimos la que pasa por abajo.

Esta interrupción delimita numerosos arcos en el aplanamiento del nudo.

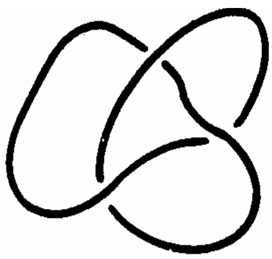
Dos arcos en este caso del enlace .



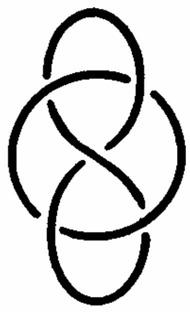
Uno solo, evidentemente para el redondel simple



Tres arcos, aquí, están delimitados



Cinco, en esta presentación del nudo de Whitehead

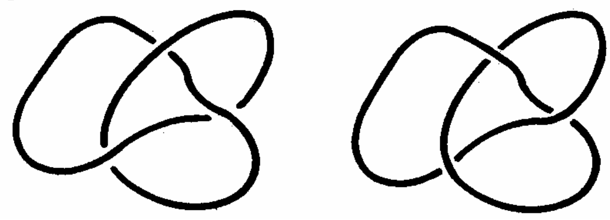


Este artificio del dibujo nos asegura que es , de la posición del nudo en el espacio , de lo que se trata; lo que nosotros llamamos su sumersión *en el espacio*

Un dibujo que no respete estas condiciones y este modo de presentación del nudo, puede presentar entrecruzamientos que son verdaderas intersecciones.

Diremos, en este caso, que el nudo puesto en plano, habrá sido dejado-en - plano. Para decirlo de otra manera se trata de una inmersión ***en el plano***.

Listing utiliza los términos de *Uberkreuzung* que puede traducirse por el término francés de sobrecruzamiento y *Durchkreuzung* que puede traducirse por entrecruzamiento [12]



Ejercicio: Dejar en plano estos dos nudos trébol. ¿qué es lo que los distingue en lo sucesivo?

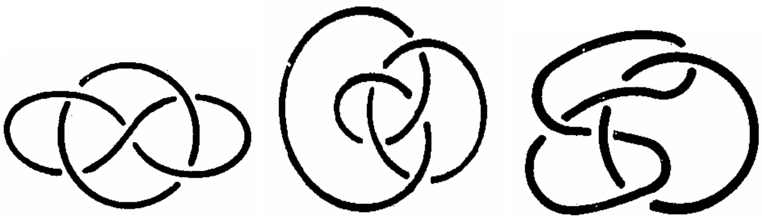
Como no hay entrecruzamientos en el aplanamiento, utilizaremos el término cruzamiento o arriba-abajo, indiferentemente para sobrecruzamiento o subcruzamiento .

Hablaremos así, del plano del aplanamiento, para designar el plano sobre el cual el nudo es supuesto aplanado.

b) De la presentación del nudo

Un nudo aplanado se compone entonces de arcos y de cruzamientos que lo caracterizan o, más bien, que caracterizan *una presentación* del nudo aplanado.

El término presentación , debe ser entendido como la manera en la cual el nudo se presenta (este término viene de la teoría de grupos). Un mismo nudo tiene múltiples presentaciones aplanadas

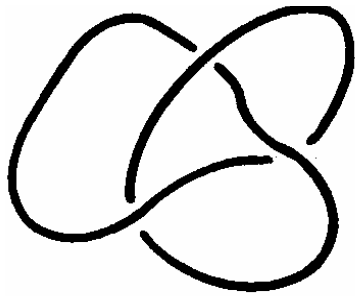


Ejercicio: ¿Hay algún modo de pasar de una de estas cadenas a otra, por deformaciones flexibles y continuas? A continuación damos ejemplos de cambio de presentación (p.78,79)

c) Zonas

Volvamos sobre lo que caracteriza una presentación dada: los arcos y los cruzamientos. Ellos delimitan, en el plano del aplanamiento, un cierto número de zonas.

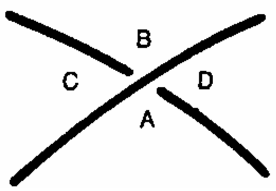
Una zona se caracteriza por el número de arcos que la bordea; ese número es igual al número de cruzamientos de los cuales es adyacente . Hay, por lo tanto, zonas con un arco (y por lo tanto, adyacente a un cruzamiento); son bucles, según la terminología de Listing; hay también zonas de dos arcos (adyacente a dos cruzamientos), y luego zonas de tres arcos (adyacente a tres cruzamientos) que Listing llama malla, etc.



La zona exterior obedece a los mismos principios que las otras; a pesar del rol particular que le veremos jugar un poco más adelante, es una zona como las otras.

d) Cruzamientos

Cada cruzamiento tiene cuatro zonas adyacentes, dos a dos opuestas por los vértices A/B y C/D.



Alrededor de un cruzamiento hay también zonas adyacentes entre ellas, separadas por una porción de arco: A/D, D/B, B/C y C/A.

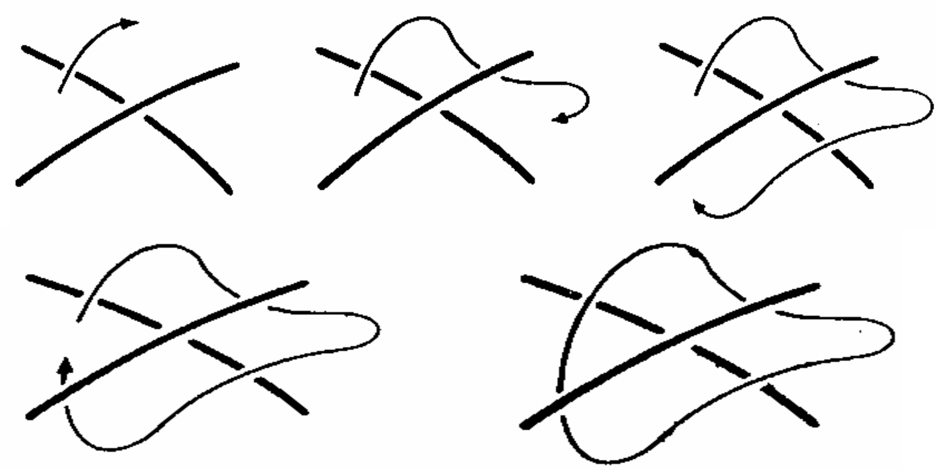
Si se nominan las zonas adyacentes pueden presentarse dos posibilidades que tienen en cuenta el pasaje por arriba y por abajo de cada uno de los arcos

Es un matiz esencial a mantener en lo que concierne al nudo.

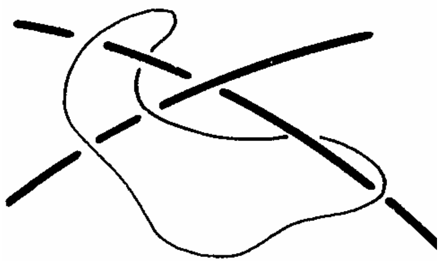
e) Trayectos alrededor de un cruzamiento

Para tratar trayectos alrededor de un nudo, vamos a remitir este problema al de ciertos trayectos: los que giran alrededor de cada cruzamiento de manera simple y alternada.

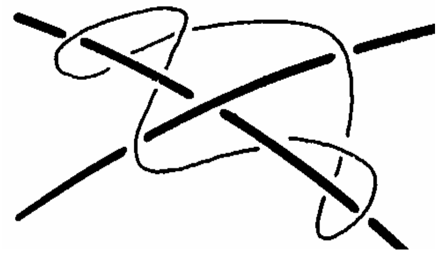
Son trayectos que pasan sucesivamente una y solo una vez por cada zona adyacente a este cruzamiento en el orden determinado por el de la vecindad de las zonas; es decir, pasando siempre de una zona a otra zona que le es adyacente.



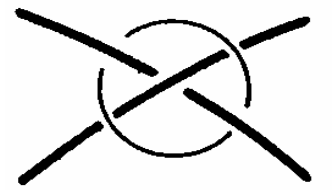
He aquí un trayecto que no gira *alrededor* de un cruce



Y aquí, uno que gira alrededor, pero no de manera simple:



El trayecto no es en efecto simple, pues, él también gira alrededor de los arcos. He aquí ahora un trayecto simple que gira alrededor de un cruzamiento:

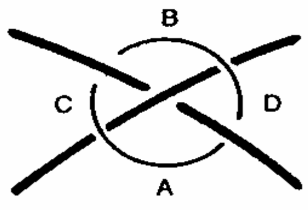


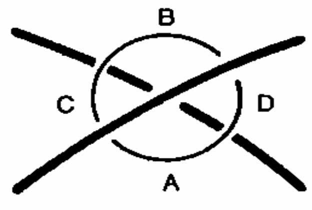
Los trayectos que pasan alrededor de un cruzamiento son llamados simples si pasan una y solo una vez por cada zona. Ellos son ,así, necesariamente alternados.

Un trayecto alternado es un trayecto que pasa una vez por arriba de un arco, una vez por debajo del siguiente que encuentra en su recorrido; y así ,sucesivamente hasta que el trayecto se cierra.

En efecto, habiendo atravesado una zona y no pudiendo volverla a atravesar, según la definición, un trayecto simple que gira alrededor de un cruzamiento debe atravesar una zona adyacente a la primera y en el sentido contrario del que acaba de tomar, con respecto al atravesamiento del plano en la puesta en plano.

Para un cruzamiento cuyas zonas están definidas por una función, o, dicho de otra manera nombradas por una letra (hemos visto que había dos posibilidades), hay dos tipos de trayecto — simple y alternado — que gira alrededor:





reparación hilván

Diremos que uno sostiene y hace nudo (llamamos a esta situación una reparación), pero, el otro no sostiene, desliza — y como no sostiene, no lo tendrás — llamamos a esta situación ***el hilván*** (es neutro de hecho; es el " giro alrededor", de Pierre Soury).

Es este que "no tendrás", el hilván, el que vamos a utilizar en nuestros cálculos; el mismo se presta a una simplificación algebraica. Es inconsistente en topología.

En cambio, el que sostiene, del cual no haremos uso en nuestros cálculos tiene una función topológica de base.

Presentamos ahora el procedimiento de cálculo que permite orientarse en el conjunto de los diferentes trayectos alrededor de los diferentes nudos. Llamaremos a este procedimiento, un algoritmo.

Este algoritmo nos permitirá, por un juego de escrituras, nombrar las zonas. Ellas, serán así, marcadas por una palabra constituida a partir de una elección de letras generatrices. Obtenemos "el grupo fundamental del nudo".

El lector encontrará , a continuación, algunas observaciones y aplicaciones de este algoritmo , en ejemplos.

2. El algoritmo

El procedimiento que permite nombrar cada zona del aplanamiento de un nudo, es comparable al cálculo de la valencia de los vértices de un grafo, en la búsqueda del carácter euleriano, ligado o no, a este grafo. El paralelismo entre el problema de los puentes de Köenigsberg y nuestro problema , se mantiene desde hace bastante tiempo. Aquí, la técnica matemática ,no resuelve más que imperfectamente ,el problema planteado por los trayectos.

a) El algoritmo mismo

1. Un nudo aplanado. Pasar a la etapa 2
2. Orientar el atravesamiento del plano del aplanamiento. Pasar a la etapa 3
3. Por comodidad, ubicar el elemento neutro del grupo en el campo exterior (no limitado). Pasar a la etapa 4

4. Elegir dos primeras zonas generatrices , alrededor de un mismo cruzamiento adyacente al campo exterior. Pasar a la etapa 5.
5. Efectuar el hilván alrededor del cruzamiento en cuestión, siguiendo la orientación que atraviesa la zona a nombrar en sentido negativo: pasar a la etapa 6.
6. Dar su nombre a la cuarta zona adyacente a este cruzamiento deletreando, con su sentido de atravesamiento del plano, las zonas recorridas en el orden del hilván. Pasar a la etapa 7
7. Proseguir de la misma manera (5-6) a) para cada cruzamiento teniendo tres zonas ya nombradas. b) mientras queden zonas a designar. Si estas dos condiciones no se han cumplido, pasar a la etapa 8.
8. a) si no hay más cruzamientos que tengan tres zonas adyacentes ya nombradas , agregar, de manera de producir un cruzamiento del cual tres zonas estén ya nombradas , un generador nuevo en una de las zonas que queda por designar. Pasar a la etapa 5. b) Si todas las zonas están nombradas pasar a la etapa 9
9. Cuando todas las zonas estén nombradas, pueden quedar cruzamientos alrededor de los cuales no hemos calculado nada. Podemos dar, gracias a estos cruzamientos, otros nombres a algunas zonas (5-6). Formar, luego, las relaciones que son la expresión de la igualdad algebraica de los diferentes nombres de una misma zona; luego pasar a la etapa 10.
10. El cálculo se detiene; el algoritmo está terminado.

Obtenemos un grupo presentado por generadores y relaciones (ver anexo del capítulo II, p.27).

Y un dibujo del nudo, en el cual , cada zona está marcada por palabras articuladas entre sí por la estructura de este grupo.

Esta articulación corresponde también en el espacio del nudo, a correspondencias entre los trayectos que atraviesan esta zona. (ver capítulo III ,p 37)

b) Observaciones sobre las etapas 3 y 4 del algoritmo.

Como ya hemos visto, una intersección, presenta cuatro zonas adyacentes. Nos es preciso entonces, en el caso más simple, conocer tres de esas zonas adyacentes para deducir la expresión de la cuarta.

Esto se debe al hecho que utilizamos, una de las posibilidades del trayecto alrededor de un cruzamiento: aquella que no sostiene, el hilván.

En este caso, obtenemos entre este trayecto y el elemento neutro, una igualdad (ver observación siguiente).

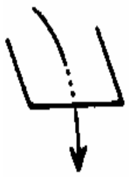
Por razones de comodidad, hemos nombrado, en nuestro algoritmo, la zona exterior del nudo con un “1”; es también el elemento neutro del grupo, en una notación multiplicativa (anexo del capítulo II, p.28). No hay necesidad entonces, más que de dos generadores para comenzar él calculo. Estos dos generadores deben ser adyacentes a una misma intersección, ella misma adyacente al campo exterior , para convenir a este principio que consiste en que, es partiendo de los nombres de tres zonas , que se obtiene el nombre de una cuarta.

c) Observaciones sobre las etapas 5 y 6 del algoritmo.

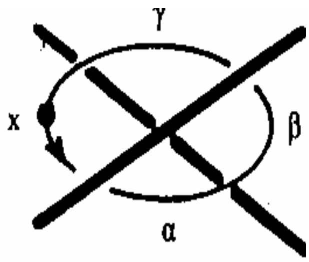
En la etapa 5, el hecho de girar siguiendo la orientación que hace atravesar *la zona a nombrar* en sentido negativo, nos asegura de que el trayecto alternado que describiremos, comience por la expresión de la inversa de esta incógnita, o sea : X^{-1}

- Incógnita de una ecuación cuyo segundo miembro es el elemento neutro, ya que el trayecto alternado no sostiene. Un hilván es un trayecto neutro.

Cualesquiera sean las expresiones que encuentre en su recorrido, α, β, γ **,** el hilván va dar lugar a la fórmula:



$$x^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma = 1$$



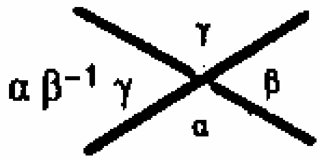
La etapa 6 se esclarece entonces, y parece simple si se ha tomado la precaución ,relativa al sentido del hilván, indicada en la etapa 5; ya que es suficiente resolver esta ecuación algebraica en el grupo, haciendo pasar x al otro miembro, después de haber cambiado su signo (ver capítulo II). Es decir:

$$\alpha\beta^{-1}\gamma = x$$

La cuarta zona adyacente, cuyo nombre buscamos, se escribe, entonces:

$x = \alpha\beta^{-1}\gamma$, que es la manera de deletrear el recorrido del trayecto, siguiendo las zonas con sus sentidos de atravesamiento del nudo. Si queremos nombrar esta zona, el hilván debe atravesarla en sentido negativo .

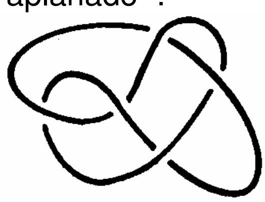
ahora α es atravesado **luego β^{-1}** **luego γ**



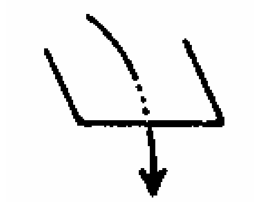
No hay más que deletrear este recorrido para encontrar la expresión de la zona buscada.

d) Tomemos un ejemplo.

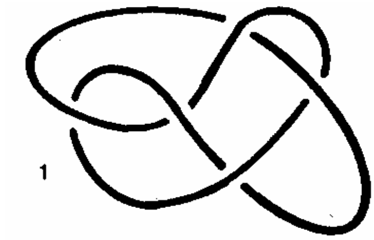
1. He aquí el dibujo de un nudo aplanado :



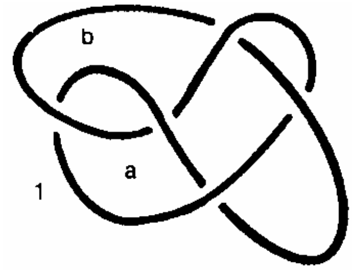
2. Elijamos anotar con un signo negativo el atravesamiento del plano, cuando éste se efectúa de arriba hacia abajo:



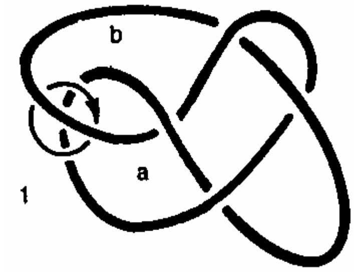
3. Ubiquemos el elemento neutro, notado 1, en el campo exterior (no limitado) del nudo:



4. Ubicamos dos letras **a** y **b** en dos de las zonas adyacentes al campo exterior, a un lado y otro de un mismo cruzamiento :



5. Ubicamos sobre nuestro dibujo el hilván , alrededor del cruzamiento ya provisto de tres letras en tres de sus zonas adyacentes. Orientémosle aquí en el sentido de las agujas del reloj a fin de responder a la exigencia que consiste en hacerle atravesar la cuarta zona adyacente yendo de arriba hacia abajo (nuestro sentido negativo decidido en la etapa n° 2).



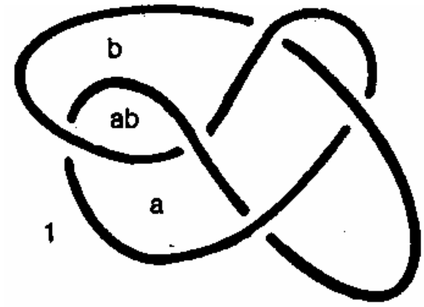
6. La cuarta zona va así a llamarse **ab**. En efecto, el hilván nos indica, si lo seguimos en el sentido de las flechas que lo orientan, un pasaje en sentido negativo por la zona **x** buscada, luego un pasaje en el sentido positivo por la zona **a**, un pasaje negativo por la zona **1** y finalmente un pasaje positivo por la zona **b**.

Sea para este trayecto neutro:

$$x^{-1}a1^{-1}b = 1$$

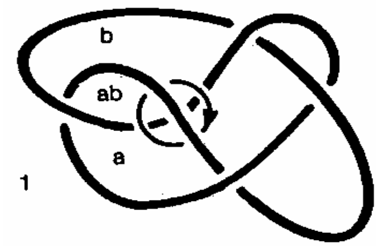
que se resuelve en la expresión :

$$x = ab$$



7. Consideremos ahora otro cruzamiento donde el cálculo es aun posible con las letras de las cuales disponemos. El que se encuentra a la derecha de la zona que acabamos de nombrar se presta perfectamente a ello: tres de sus zonas adyacentes están ahora provistas de un nombre.

7^5. Sobre nuestro dibujo ubicamos el hilván en ese cruzamiento:



Aquí también lo orientamos en el sentido de las agujas del reloj. Atraviesa la zona incógnita en sentido negativo.

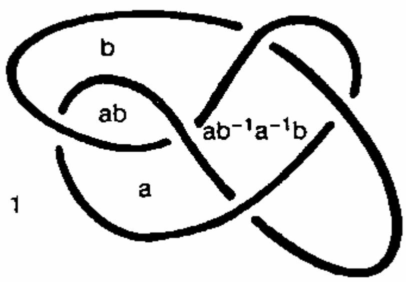
7^6. Calculamos una serie de letras, siguiendo el trayecto del hilván en el sentido indicado:

$$a(ab)^{-1}b$$

es el nombre de la zona buscada.
Ahora bien,

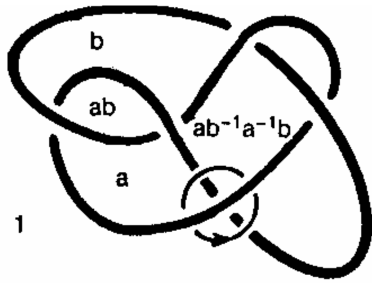
$$a(ab)^{-1}b = ab^{-1}a^{-1}b$$

(Para invertir una palabra, ver el anexo del capítulo II)



7^7. Pasemos a la intersección en la parte baja de la zona que acabamos de designar.

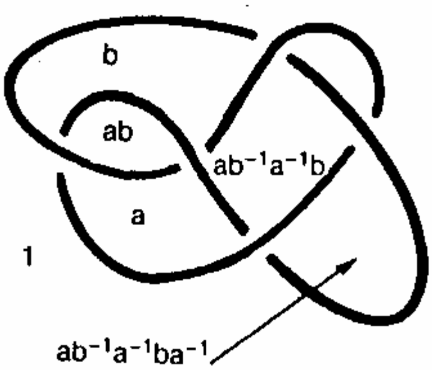
7^{7-5} .Ubiquemos el hilván:



Este gira, aquí, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

7^{7-6}. Su recorrido se lee entonces:

$$(ab^{-1}a^{-1}b)a^{-1}1$$

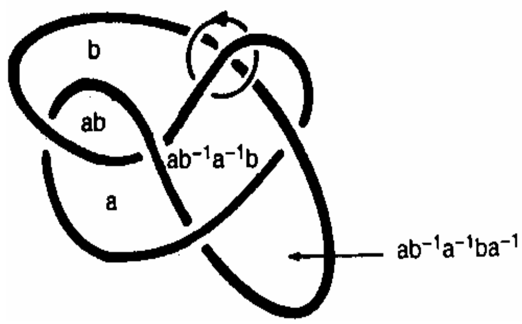


Sea $ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}$ la palabra que nombra la cuarta zona (para invertir una palabra, ver anexo del capítulo II)

7^{7-7} Llevemos nuestro cruzamiento a lo alto de la zona precedentemente nombrada

$$ab^{-1}a^{-1}b$$

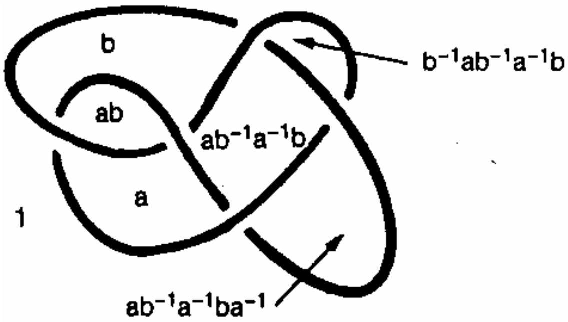
$7^{7-7-7-5}$ Ubiquemos el hilván orientado en el sentido contrario al de las agujas de un reloj



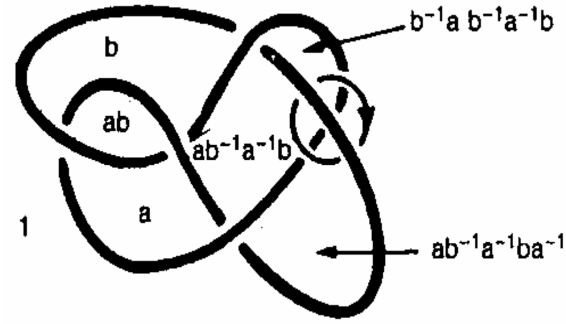
$7^{7-7-7-6}$ El recorrido a lo largo del hilván nos da la expresión:

$$1b^{-1}(ab^{-1}a^{-1}b)$$

Este es el nombre de la última zona buscada



8. En este caso, el cálculo no se ha detenido. Pasemos a la etapa 9.
9. Queda un cruzamiento entre las dos últimas zonas cuyo nombre acabamos de calcular. Ubicamos un hilván en este lugar:



Para dar un segundo nombre a la zona exterior (no limitada) ya notada **1**, orientamos este hilván en el sentido de las agujas de un reloj. Su recorrido nos indica un pasaje orientado a través de tres zonas :

$$1=(ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})(ab^{-1}a^{-1}b)^{-1}(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Si retiramos el paréntesis del medio invirtiendo la palabra que contiene :

$$1=(ab^{-1}a^{-1}ba^{-1})(b^{-1}aba^{-1})(b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

Luego retiramos los otros paréntesis:

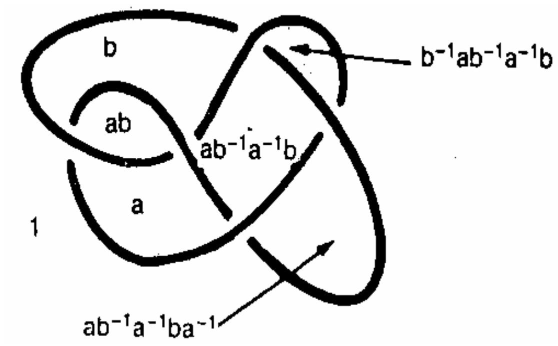
$$1=ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}aba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$$

No hay simplificación en esta etapa del cálculo.

10. El cálculo se detiene. Hemos obtenido el grupo fundamental de este nudo que se presenta gracias a dos generadores y una relación cuyas letras hemos repartido de un lado y de otro, del signo igual .

$$G=\{a,b/a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}=ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$$

Y un dibujo de ese nudo cuyas zonas están provistas de palabras articuladas entre ellas por la estructura de este grupo .


b
ab
$ab^{-1}a^{-1}b$
$b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b$
a
1
$ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}$

.

Anexo al CAPÍTULO v
Ejercicios

Podemos ahora ejercitarnos a resolver algunos problemas.

a) Ejercicios corregidos :

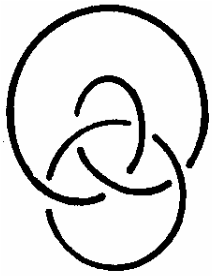
Ejercicio a_1:

Calcular el grupo el grupo por zonas, en la cadena de Whitehead , de la cual he aquí una presentación :

Para el calculo de este grupo, también será preciso utilizar dos generadores. Por otra parte, la última zona calculada posee dos denominaciones .

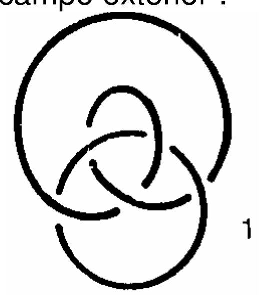
Corrección :

1. La cadena de Whitehead aplanada

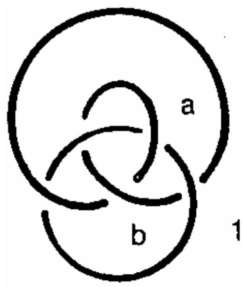


2. Orientación del atravesamiento del plano :

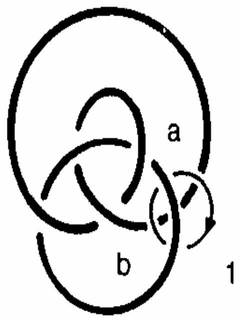
3. El elemento neutro en el campo exterior :



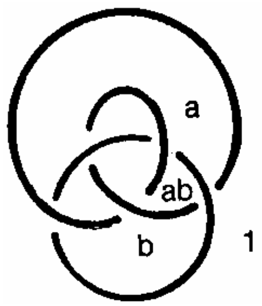
4. Dos letras de engendramiento para dos zonas :



5. El primer hilván convenientemente orientado alrededor de un cruzamiento

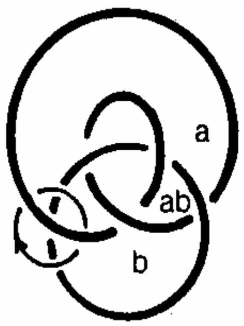


6. La cuarta zona es nombrada **ab**

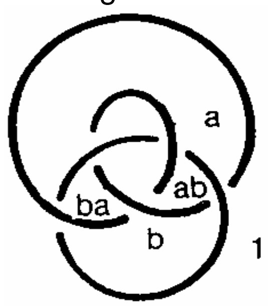


7. Consideremos otro cruzamiento

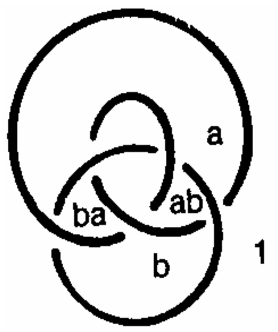
$7^{5.}$ El hilván orientado alrededor de este cruzamiento:



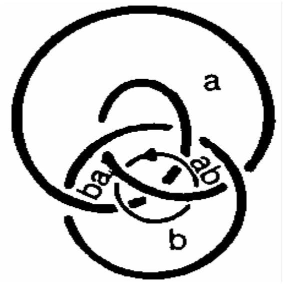
7^{6}. Una nueva zona es designada **ba**



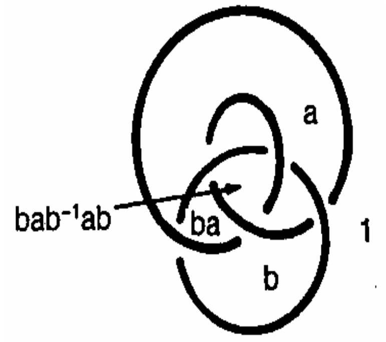
7^{7} Aún un cruzamiento



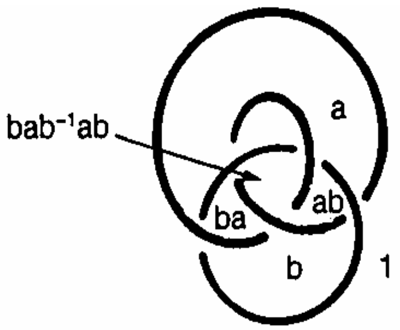
$7^{7\text{-}5}$:Con un hilván orientado :



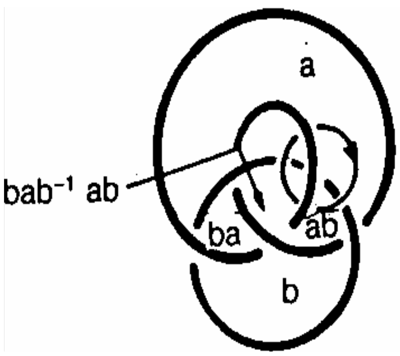
$7^{7\text{-}6}$ La zona central se llama $bab^{-1}ab$:



$7^{7\text{-}7}$. Aún un cruzamiento:

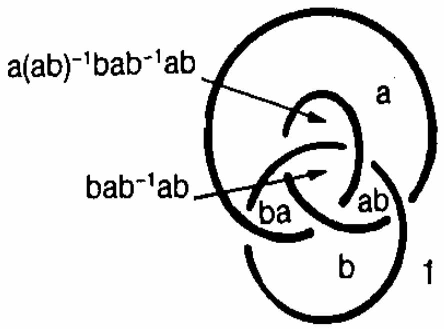


$7^{7\text{-}7\text{-}5}$. Con el hilván orientado

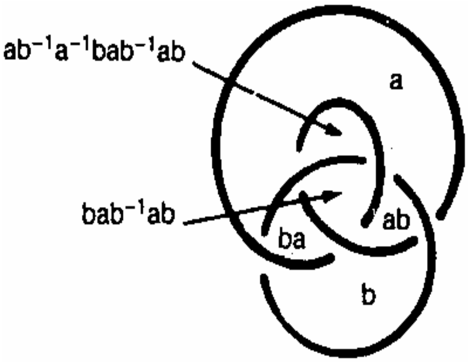


7[7-7-6] La ultima zona es nombrada :

$$a(ab)^{-1}bab^{-1}ab = ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$$



8. El cálculo se detiene. Todas las zonas están nombradas. Se pasa entonces a la etapa 9.

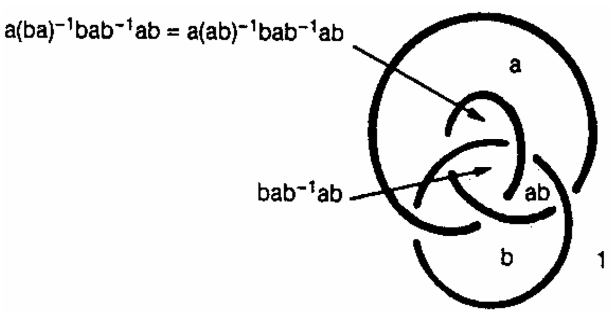


9. Queda un cruzamiento que aun no ha sido utilizado

9[5]

9[6]. Esto da una segunda nominación a la última zona calculada:

$$a(ba)^{-1}bab^{-1}ab = ba^{-1}b^{-1}bab^{-1}ab$$



10 .El cálculo se detiene. El grupo de este nudo tiene dos generadores y una relación:

$$G = \{a, b/ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a\}$$ [8]

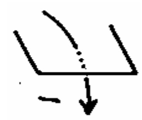
Ejercicio a_2:

Calcular el grupo por zonas de la cadena Borromea aplanada Este cálculo necesitará la utilización de tres generadores.

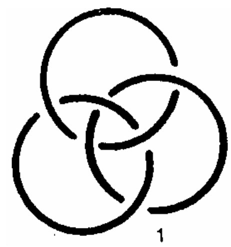
Corrección:

1. La cadena Borromea en su presentación aplanada:

2. El atravesamiento del plano:



3. El elemento neutro: 1



[8] Para aquellos lectores que conocen el cálculo de los grupos, señalemos que los miembros de esta relación son palabras simétricas en espejo. Un cálculo algebraico simple permite formularla a partir de la relación deducida: pasar ,a ,desde el principio del primer miembro al principio del segundo invirtiendo su signo:

$$b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a$$

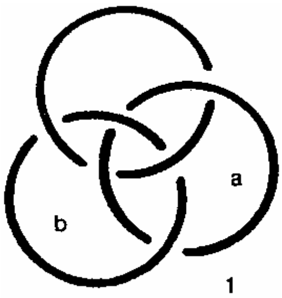
pasar *a* del final del segundo miembro al final del primero invirtiendo su signo:

$$b^{-1}a^{-1}bab^{-1}aba^{-1} = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$$

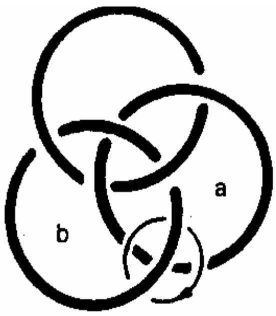
El lector puede constatar que al nombrar $U = a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}$, esta relación se escribe: $b^{-1}U = Ub^{-1}$ .Si nosotros tenemos el cuidado de plantear $\alpha = U$ y $\beta = b$, el grupo puede ser expresado por :

$$G = \{\alpha\beta/\beta^{-1}\alpha = \alpha\beta^{-1}\}$$

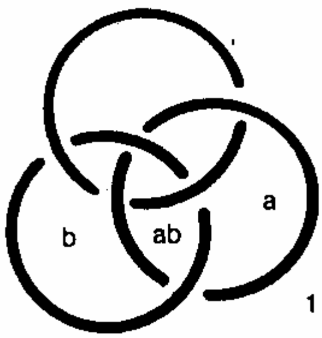
4. Dos generadores



5: El hilván orientado



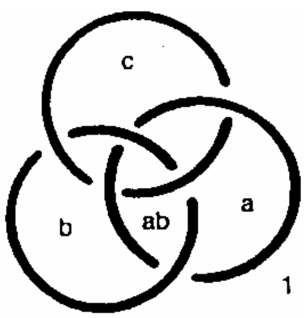
6. La cuarta zona es nombrada **ab**:



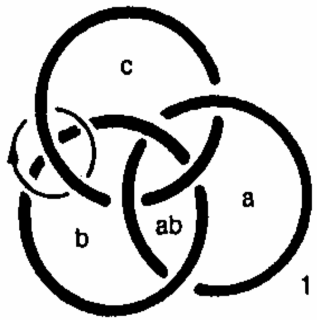
7. No es posible proseguir así: cada uno de los cruzamientos que no han sido utilizados, no comporta tres zonas adyacentes ya nominadas. Pasemos a la etapa

8.

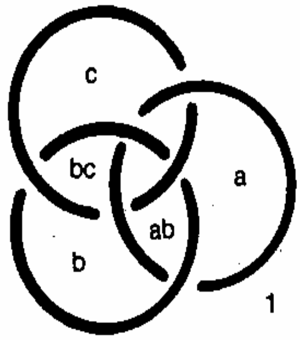
8ª Habiéndose detenido el cálculo, agregamos un generador, **c**. Luego pasamos a 5



8^5. El hilván orientado en un nuevo cruzamiento.

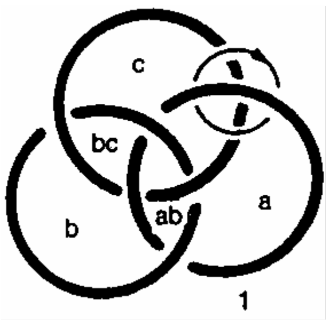


8^{6} Esta zona se nomina aquí **bc**

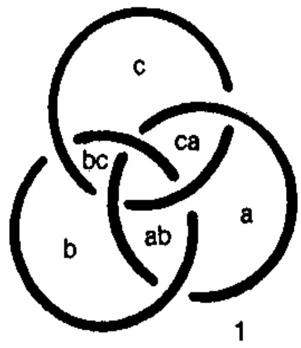


8^{7} Tomemos otro cruzamiento

$8.^{7-5}$Un hilván orientado.

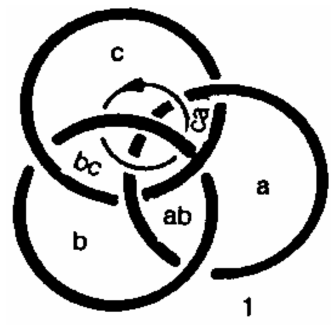


$8.^{7-6}$ Esta zona se llama **ca**:

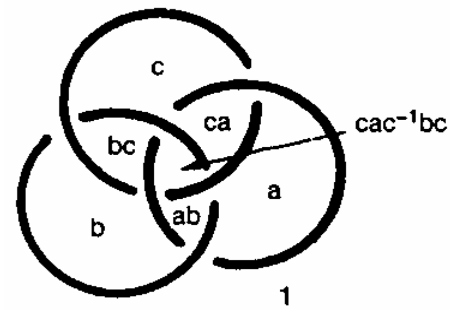


$8.^{7-7}$ Aún un ultimo cruzamiento

8^{775} Un hilván orientado:

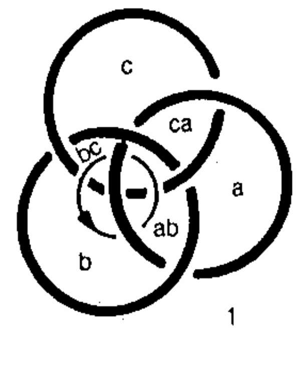


8.776. La zona central se llama entonces: $cac^{-1}bc$. Es un primer nombre

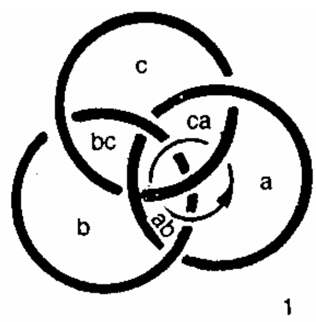


8 b. El cálculo se detiene; todas las zonas están nombradas. Pasemos a la etapa 9.

9. Quedan dos cruzamientos que no han sido utilizados. Ellos dan lugar a dos relaciones, que se establecen a partir de la igualdad de los nombres de la zona central .



$cac^{-1}bc = bcb^{-1}ab$



$cac^{-1}bc = aba^{-1}ca$

$$cac^{-1}bc = bcb^{-1}ab \qquad cac^{-1}bc = aba^{-1}ca$$

10. El cálculo se detiene. El grupo de este nudo tiene tres generadores y dos relaciones.

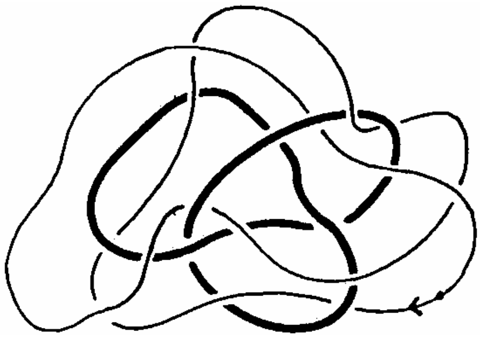
$$G = \{a, b, c/aba^{-1}ca = bcb^{-1}ab = cac^{-1}bc\}$$

b) Trayectos alrededor de nudos.

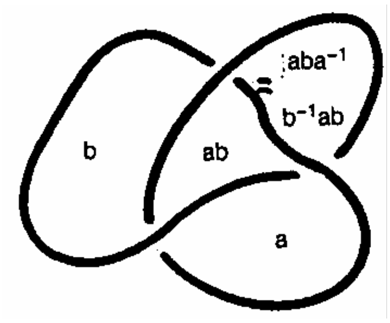
Ejercicio b_1

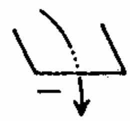
Un trayecto alrededor del nudo trébol. Dar la expresión del trayecto que recorre el espacio alrededor del nudo trébol en el dibujo siguiente:

Se trata de expresarlo a partir del punto marcado en la zona exterior, siguiendo el sentido indicado.



Indicaciones : para encontrar la expresión de este trayecto, es preciso, desde ahora, calcular los nombres de las zonas definidas por el aplanamiento del nudo trébol. Damos aquí el resultado de este cálculo:





$$G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$$

Estas denominaciones dependen de la elección que hayamos hecho de las zonas generatrices. Es preciso saber que hemos partido de las dos zonas, a y b, con la convención de sentido que acompaña el dibujo.

Calculemos el trayecto en cuestión partiendo del punto trazado y recorriéndolo en el sentido de la flecha (otras convenciones dan otros resultados, cuya equivalencia está asegurada por permutaciones).

En estas condiciones este trayecto se escribe con paréntesis que indican momentáneamente los pasajes de cada zona atravesada:

$$(a)(b)(b^{-1}ab)^{-1}(ab)^{-1}(b)(b^{-1}ab)$$

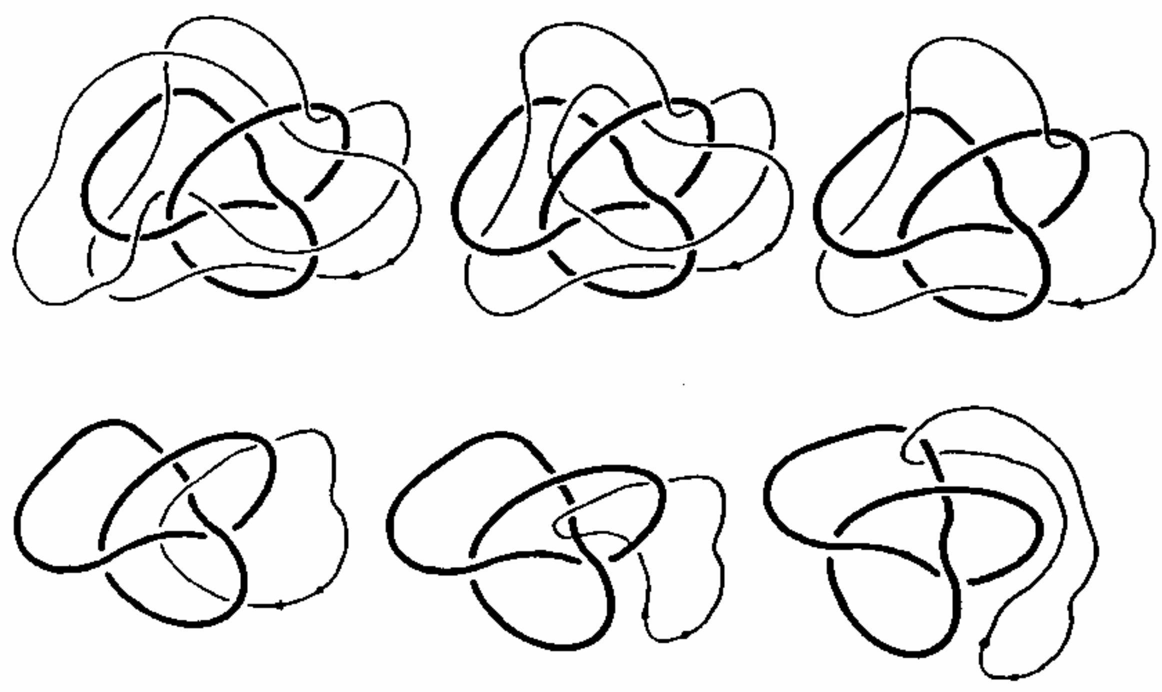
Por supresión de paréntesis obtenemos el resultado siguiente:

$$abb^{-1}a^{-1}bb^{-1}a^{-1}bb^{-1}ab$$

que podemos simplificar así :

$$(a(bb^{-1})a^{-1})(bb^{-1})(a^{-1}(bb^{-1})a)b = b$$

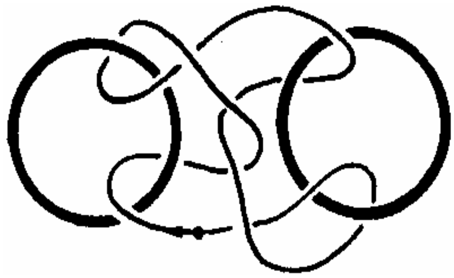
He aquí el cambio de presentación del lazo explorando el espacio complementario del nudo trébol, a fin de verificar el resultado obtenido.



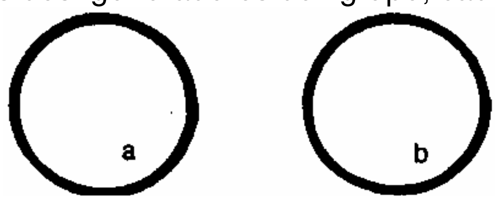
Ahora, podemos ver que el lazo pasa por la zona b.

.**Ejercicio b_2:**

Un trayecto alrededor de dos redondeles libres: Formular la expresión del trayecto que recorre el espacio alrededor de dos redondeles independientes en el dibujo siguiente:



Indicaciones : Es necesario tratar, en primer lugar, el cálculo de las zonas. Aquí se reduce a dar los dos generadores del grupo, cada uno en un redondel.



Al seguir el recorrido del trayecto presentado en este ejercicio, siguiendo las zonas atravesadas, obtenemos el resultado:

$$(a)^{-1}(a)(b)^{-1}(b)$$

Retiramos los paréntesis:

$$a^{-1}ab^{-1}b$$

..y simplificamos:

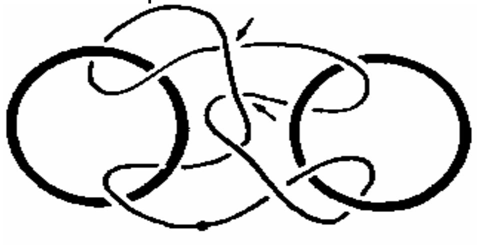
$$(aa^{-1})(bb^{-1})=1$$

Observación sobre el alcance de estos cálculos: su imperfección entraña una consecuencia. El lector constata que este trayecto es neutro; sin embargo parece sostenerse en un modelo físico de la cadena, así realizable, por dos redondeles y un tercero. En efecto, esta cadena es consistente y ello puede ser verificado por una construcción. Es necesario dar cuenta de este resultado que puede parecer entonces paradójico

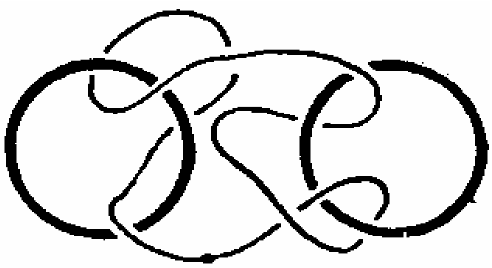
El hecho se explica si agregamos la definición de una operación específica para el grupo fundamental. Los cálculos que efectuamos son verdaderos excepto por *homotopía*.

Es decir que los trayectos, pero no los redondeles que hacen nudos pueden atravesarse a sí mismos. Es la primera y esencial debilidad de esta técnica que, en una teoría de nudos acabada, no da cuenta de la estructura nodal. Esta consecuencia se aprecia, por ejemplo, en el hecho de que nudos diferentes pueden tener el mismo grupo fundamental.

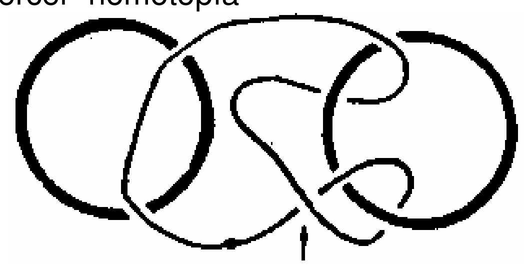
Efectuemos, primeramente, dos homotopías a la altura de los arriba –abajo indicados por las flechas



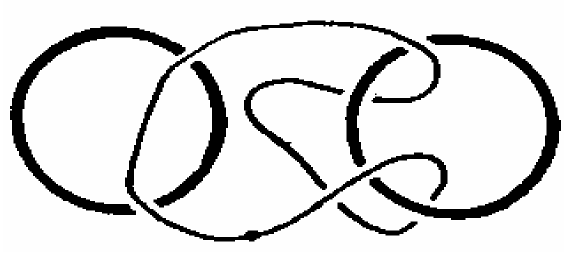
Podemos ahora deshacer el bucle



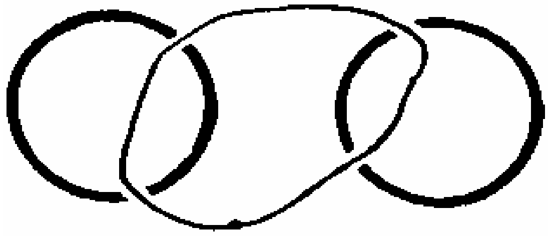
Luego, efectuamos una tercer homotopía



Esto permite deshacer el otro bucle pasando por el segundo redondel

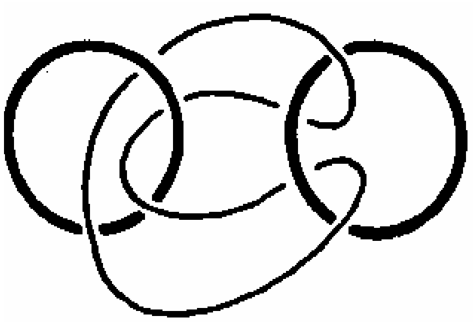


Tenemos un trayecto trivial que no sostiene

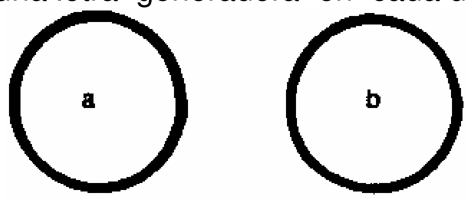


Ejercicio b_3:

Otro trayecto alrededor de dos redondeles libres (la cadena borromea). Dar la expresión del trayecto siguiente en el caso en que recorre el espacio alrededor de dos redondeles libres.



Indicaciones: el cálculo de las zonas es muy simple como en el caso precedente; basta poner una letra generadora en cada uno de los redondeles



La expresión de este trayecto se escribe:

$$ab^{-1}a^{-1}b$$

Esta forma característica de una palabra del grupo fundamental que consiste en dos términos seguidos del inverso del primero, seguidos del inverso del segundo, se llama un conmutador. (ver conclusión página 87).

Al considerar un cambio de presentación que preserve el mismo nudo, formado por estos dos redondeles y el trayecto, podemos observar que uno de estos redondeles recorre el espacio de los otros dos redondeles (el trayecto y el otro redondel) según el mismo recorrido que el del trayecto calculado en este ejercicio.

Tendrá entonces como expresión un conmutador.

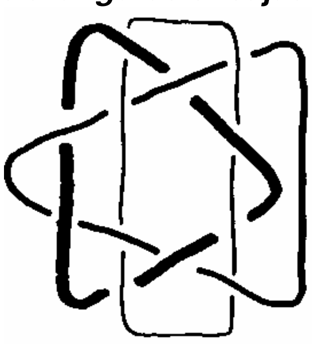
En esta cadena los redondeles son intercambiables. El cálculo de este ejercicio y esta homogeneidad de los redondeles, permiten concluir que la cadena de la familia de los borromeos, de la que se trata aquí, tiene la propiedad que consiste en trivializarse (dos redondeles libres), cuando se retira uno cualquiera de los tres.

En efecto, en un conmutador, si se retira una de las dos letras generatrices, queda la otra y su inversa, por lo tanto el elemento neutro. Podemos decir entonces, que el trayecto es neutro en relación a uno solo de los redondeles y que el redondel de este trayecto y el redondel restante son libres o independientes uno del otro.

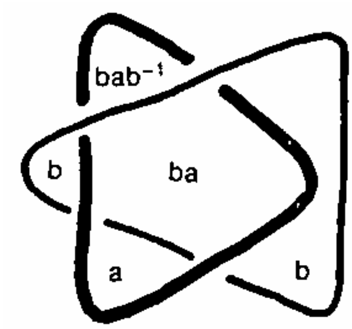
Pero esto no asegura el carácter no neutralizable salvo por homotopía , como veremos en los ejercicios siguientes. En cambio, estamos seguros de que una sola homotopía no puede deshacer esta cadena.

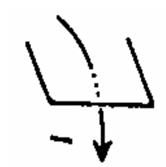
Ejercicio b_4:

Un trayecto en dos triángulos encajados



Indicaciones: damos el resultado obtenido gracias al algoritmo de la nominación de zonas:





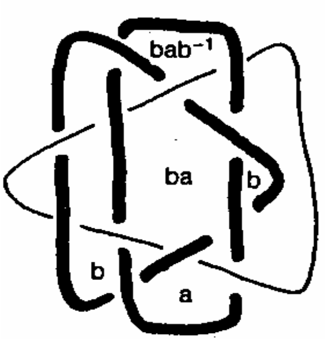
La expresión del trayecto pedido , Partiendo de lo alto del dibujo en el sentido de las agujas de un reloj, se escribe:

$$b^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$

O sea

$$ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$

La cadena constituida por estos dos triángulos y este trayecto tiene la propiedad borromea. El lector puede verificarla gracias a este cálculo, y a condición de calcular uno de los dos triángulos como un trayecto alrededor de los otros dos componentes de esta cadena, en el dibujo siguiente por ejemplo.

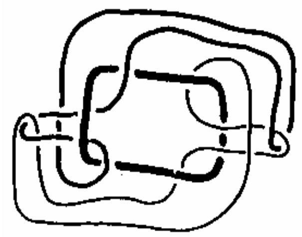


$$a^{-1}bab^{-1}b^{-1}baba^{-1}b^{-1}$$

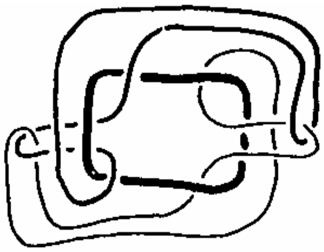
O sea $$a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}$$

Estos resultados, como en el caso de la cadena de la familia de las borromeas (ver ejercicio b_3), muestran que esta cadena no es neutralizable por una sola homotopía (ver ejercicio b_2)

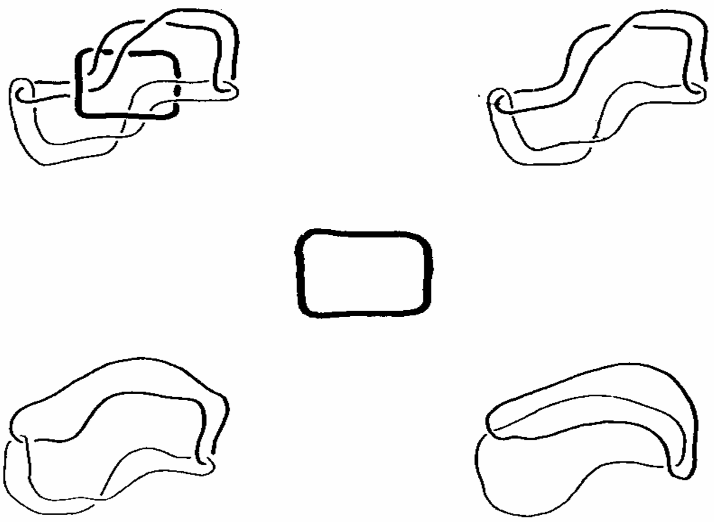
En cambio, esta es neutra, por medio de dos homotopías repartidas sobre dos redondeles diferentes, en la presentación siguiente:



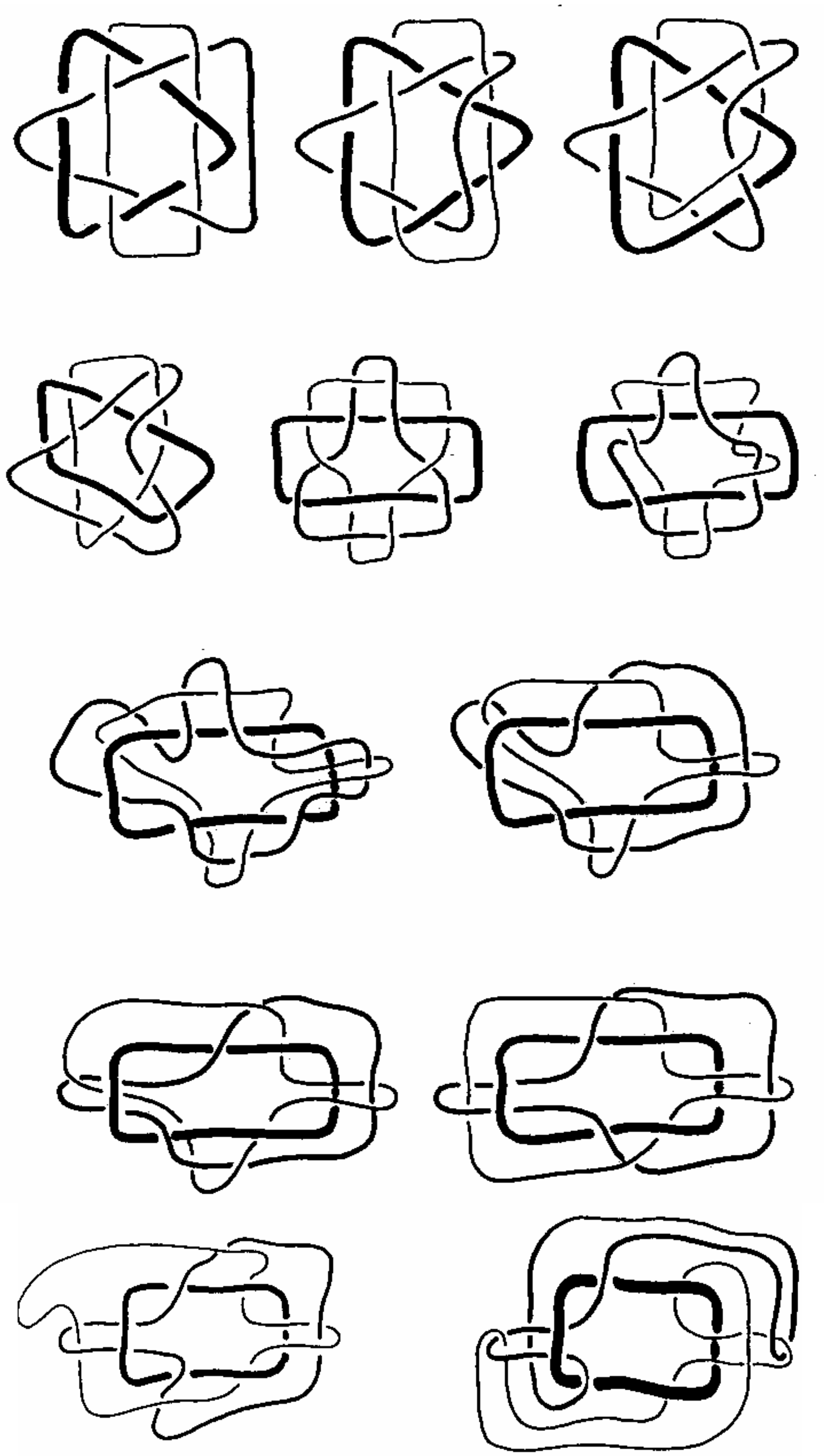
Por dos homotopías en cuatro cruzamientos:



Esta cadena se deshace; es neutra.



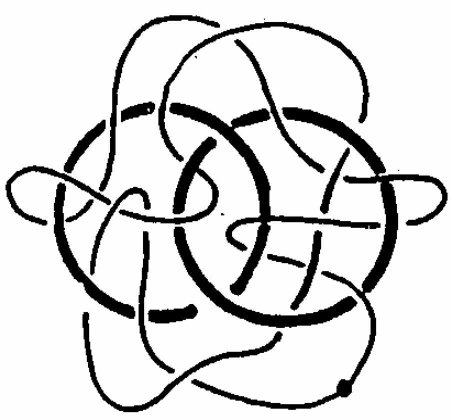
El cambio de presentación que va de la situación enunciada en este ejercicio, a la que se presta a las homotopías, es delicado. Nosotros lo damos aquí:



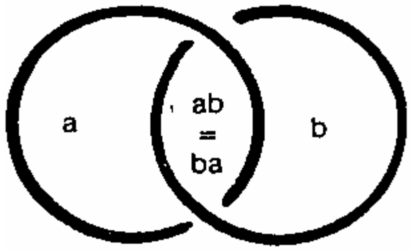
Este contraejemplo confirma que, por estos cálculo, no estamos seguros de poder deshacer las cadenas, mediante varias homotopías, efectuadas sucesivamente sobre redondeles diferentes. (Contraejemplo debido a P. Soury).

Ejercicio b_5:

Un trayecto alrededor del enlace: Buscar la expresión del trayecto siguiente alrededor del enlace.



Indicaciones: Calculemos las expresiones de las zonas delimitadas por el aplanamiento del enlace. He aquí la solución:



Como en el ejercicio precedente, podemos entonces formular la palabra del grupo de esta cadena correspondiente al trayecto propuesto, aquí, deletreándola a partir de un punto a la derecha abajo (ver figuras siguientes).

$$(a^{-1})(a^{-1})(ab)(a)(b)(b^{-1}a^{-1})(b)$$

Los paréntesis marcan aún la descomposición de este trayecto en los nombres de las zonas atravesadas en el orden impuesto por su recorrido.

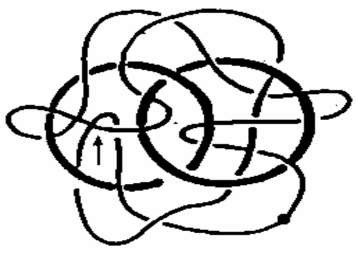
Retiramos esos paréntesis:

$$a^{-1}a^{-1}ababb^{-1}a^{-1}b$$

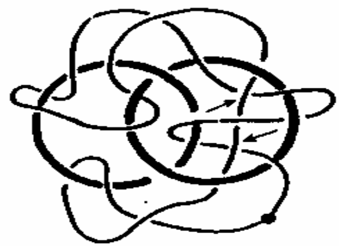
y simplificamos esta expresión gracias a nuevos paréntesis:

$$a^{-1}(a^{-1}a)b(a(bb^{-1})a^{-1})b = a^{-1}b^{2}$$

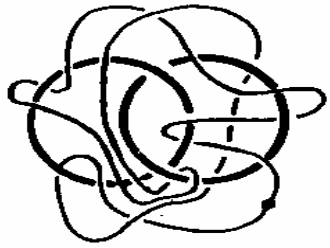
Verificaremos este resultado por dibujos, indicando las homotopías por flechas , antes de efectuarlas. (Ver la nota sobre la homotopía que se refiere a los precedentes ejercicios)



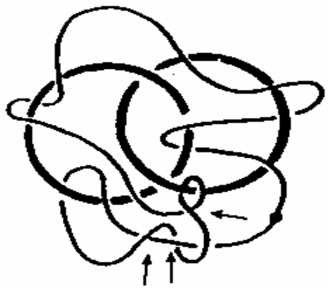
Una homotopía



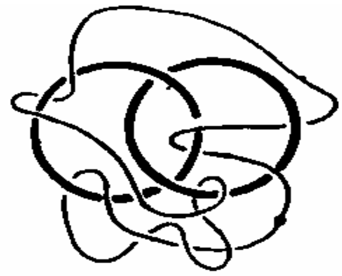
Luego dos homotopías



Desplazamos un bucle que se desliza hacia abajo al centro

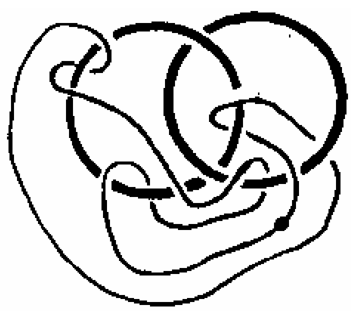


Tres homotopías, después de haber creado un bucle

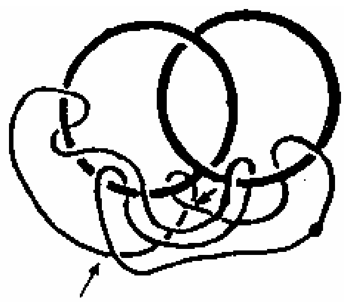


Desplazamos el hilo hacia arriba

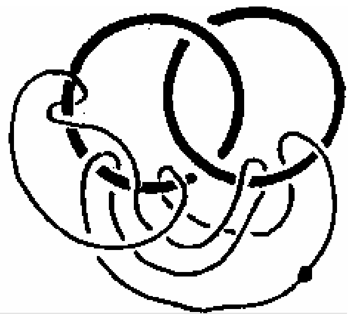
Las homotopías permiten esta reducción



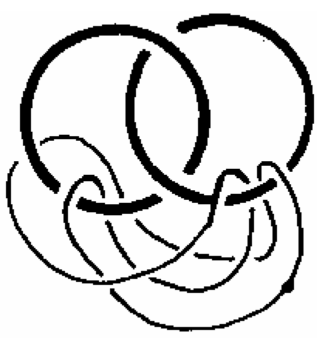
El elemento de hilo que pasaba por arriba ,hace el giro por abajo



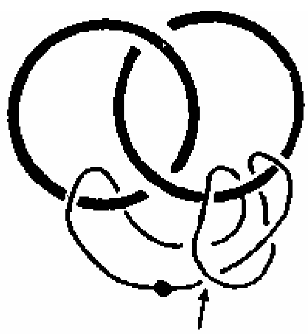
Ahora , cuatro homotopías



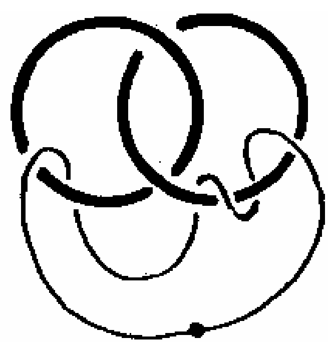
efectuadas



Autorizan esta reducción



Una última homotopía

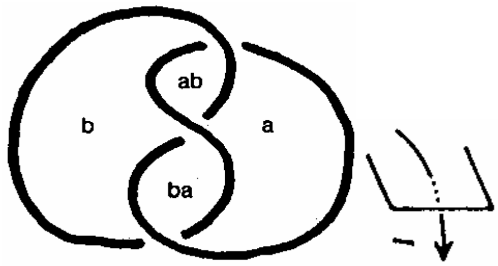


$a^{-1}b^{2}$

c) **Cambios de presentación**
Ejercicio c_1:

Invariancia del grupo en un cambio de presentación del nudo. Calcular el grupo fundamental del nudo trébol presentado en la figura siguiente:

Indicación: empezamos el cálculo por la zonas generatrices a y b en la solución siguiente:



El grupo se presenta, entonces, con dos generadores dado que el cálculo ha podido ser llevado hasta el final sin agregar otros.

La relación, en este caso, se formula así gracias a un hilván alrededor del cruzamiento central:

$$b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a = 1 \qquad b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba$$

El grupo demandado se presenta como sigue:

$$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$$

Comparemos este resultado con el del ejercicio b_1 donde habíamos calculado el grupo del nudo trébol como resultado intermedio.

Se trata de formular un isomorfismo entre estos dos resultados. Habíamos encontrado $G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$ **en el ejercicio** b_1

Es suficiente mostrar que estos dos grupos son isomorfos (homomorfismo biyectivo de grupo) a un mismo tercero.

2	1
$G = \{a, b / b^{-1}a^{-1}b = a^{-1}ba\}$	$G = \{a, b / aba^{-1} = b^{-1}ab\}$
$a^{-1}ba^{-1} = ba^{-1}b$	$bab = aba$
$a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b = ba^{-1}ba^{-1}ba^{-1}$	$bababa = ababab$

$$U = a^{-1}b \qquad\qquad U = ba$$

$$V = ba^{-1} \qquad\qquad V = ab$$

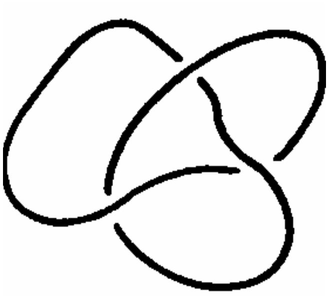
En los dos casos la relación deviene:

$$U^3 = V^3$$

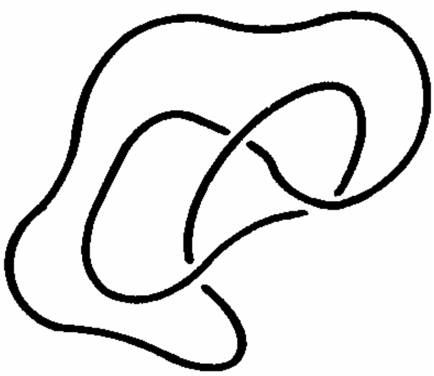
Y el grupo puede ser presentado así:

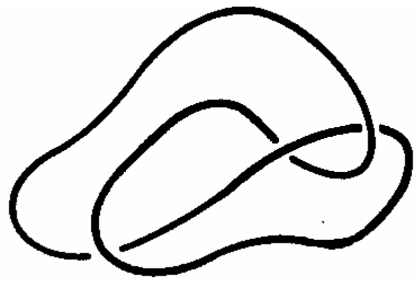
$$G = \{U, V/U^3 = V^3\}$$

Verificamos por el dibujo, en un cambio de presentación del nudo trébol, que se trata ciertamente del mismo nudo en los dos casos:

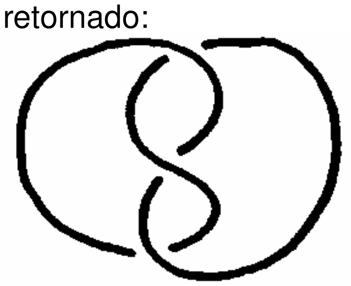


Damos vuelta un bucle haciéndole hacer el giro del dibujo



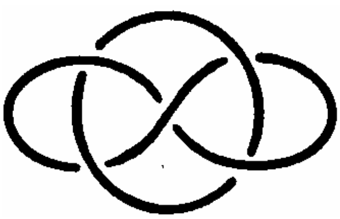


reduciendo el bucle retornado:

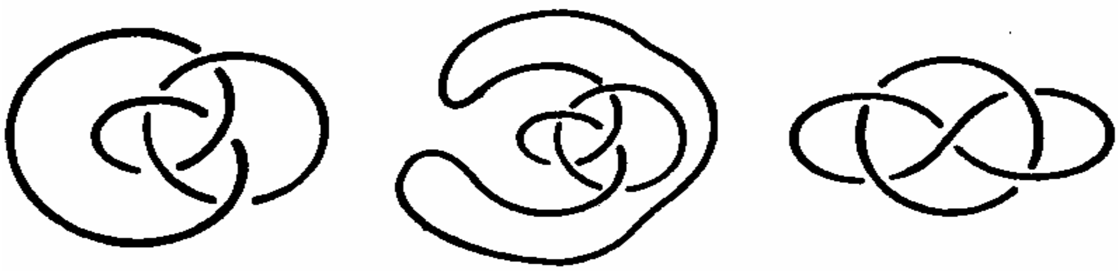


Ejercicio c₂:

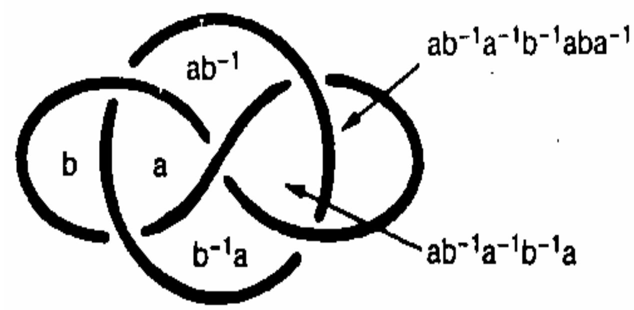
El mismo ejercicio a propósito del ***nudo de Whitehead*** en la presentación siguiente:



Indicaciones: hemos ya encontrado este nudo en el ejercicio corregido **a_1.**
Al dibujarlos, verificamos por un cambio de presentación, que se trata ciertamente del mismo nudo.



El resultado del presente ejercicio nos da el marcado de las zonas siguientes



$$ab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1} = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}a$$

con la relación siguiente:

$$a^2(bab)^{-1}ab = ba(bab)^{-1}a^2$$

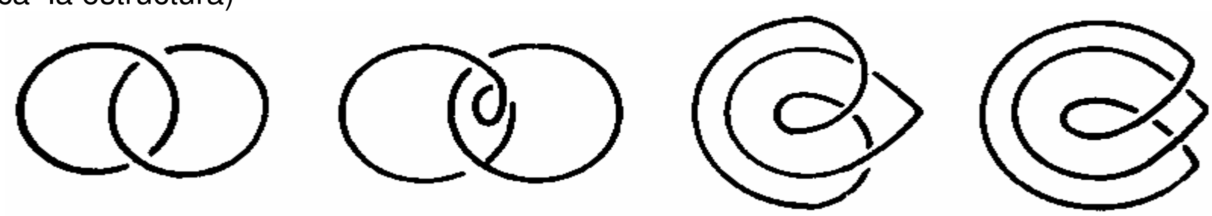
obtenida de la igualdad de los nombres de una misma zona.
Sea el grupo de este nudo:

$$G = \{a, b / a^2(bab)^{-1}ab = ba(bab)^{-1}a^2\}$$

que podemos poner en isomorfismo con el resultado del ejemplo citado.

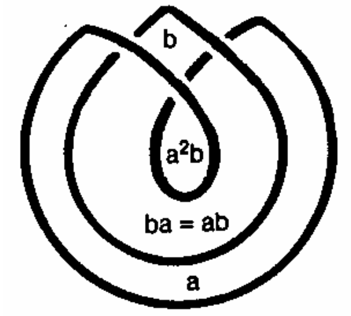
Ejercicio c_3:

Cambio de presentación *del enlace* (corte de la banda de Möebius que modifica la estructura)



Calcular el grupo en esa presentación del enlace.

Indicaciones: Damos el resultado.

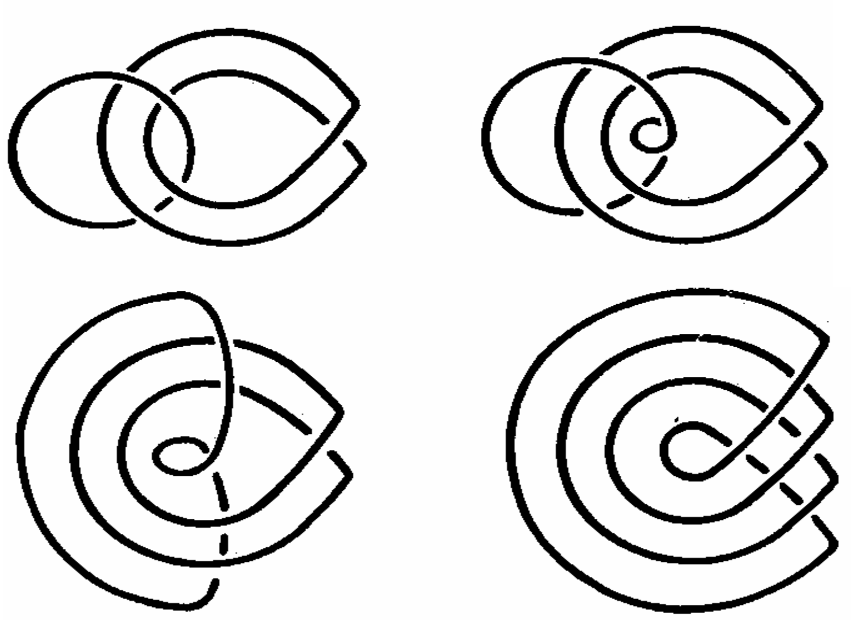


$$G = \{a, b / ab = ba\}$$

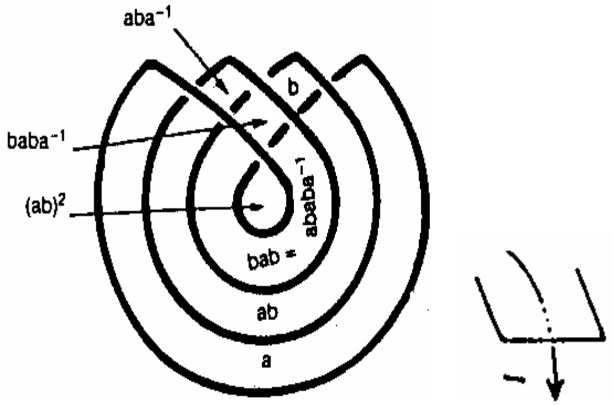
grupo del enlace

Ejercicio c_4:

El mismo ejercicio que el precedente, en esta presentación del *doble enlace* (corte de la banda de Möebius que no cambia la estructura.)



Indicaciones: damos el resultado.



$$bab = ababa^{-1}$$

$$baba = abab$$

$$G = \{a, b/(ab)^2 = (ba)^2\}$$

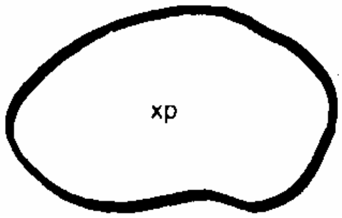
Este ejercicio comienza la continuación de este manual, que halla así, su empleo en la teoría de las superficies topológicas relacionadas con los nudos [1]. Aquí, los cortes de la banda de Möebius enlazados con su borde.

d) Índice de una zona con relación a una curva

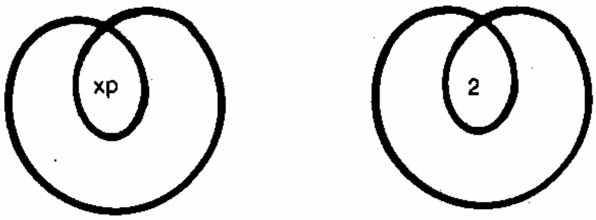
He aquí dos ejercicios que utilizan nuestro algoritmo en resultados simples. Se trata de determinar cuántas veces una curva gira alrededor de un punto situado de manera cualquiera en una de las zonas determinadas por esta curva en el plano.

Por ejemplo, el círculo gira una vez alrededor de un punto.

El índice de la zona en el círculo vale 1.

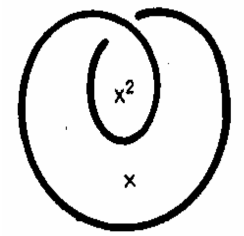


Otro ejemplo está dado por el punto p.



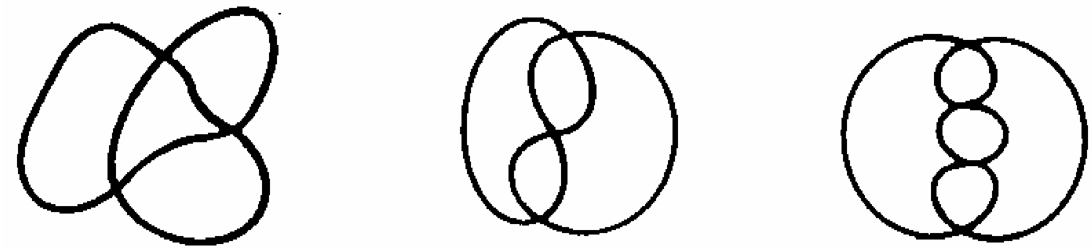
Se trata de conservar el exponente de los generadores identificados entre sí por una misma letra. En el caso del ocho interior no hay más que un sólo generador, después de haber hecho aparecer un nudo , eligiendo un arriba - abajo arbitrario.

[1] Jouis Sens (las superficies topológicas intrínsecas) Fascículos de resultados n°2

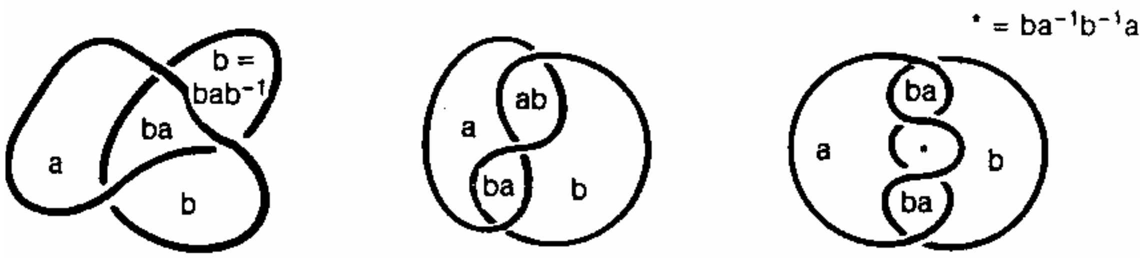


Ejercicio d_1:

Calcular el índice de zonas de las configuraciones planares siguientes:

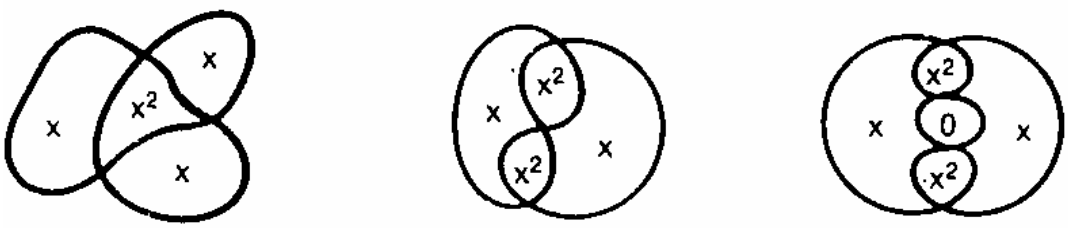


Indicaciones: después de haber calculado el grupo de uno cualquiera de los nudos que se proyecta así (restablecer los arriba- abajo indiferentemente), obtenemos, no conservando sino el grado (exponente), de los generadores identificados entre sí por una misma letra:



$b = bab^{-1}$ $\qquad$ $a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b = 1$ $\qquad$ $ba^{-1}b^{-1}a$

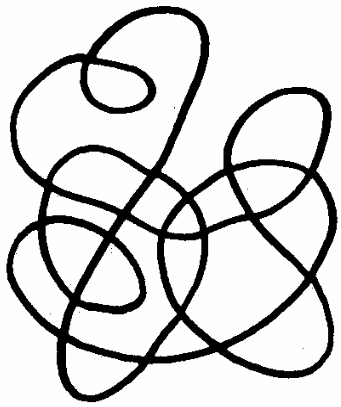
$a = b = x, \quad x = x$ $\qquad$ $a = b = x, \quad x^2 = 1$ $\qquad$ $a = b = x$



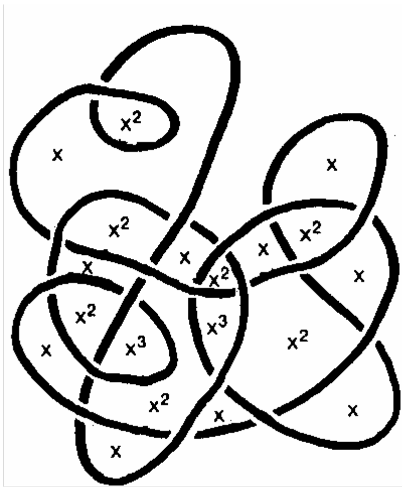
No conservamos sino los exponentes.

Ejercicio d_2:

Dar los índices de las zonas en la configuración propuesta por Listing en su tesis [11(p.811-874)]. Es la primera vez que el término "topología" es empleado en una obra científica.]



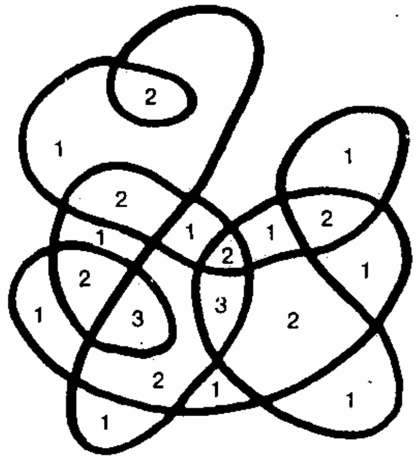
Indicaciones : al provocar un nudo, y luego identificar los generadores entre ellos, los exponentes nos dan los índices de las zonas:



Es necesario utilizar tres generadores, luego de haber planteado que :

$$a = b = c = x$$

No conservamos aquí más que los exponentes



Listing da este resultado con una figura que da cuenta de la orientación del trayecto. Esto es algo que no consideramos aquí.

Conclusión
CADENA SIGNIFICANTE & LETRA

ENJAMBRE

(*La cadena significante)*

Cadena de letras, así puede enunciarse, al final, lo que ha sido nuestro trayecto.

Nuestro recorrido, muestra, en efecto, la cadena L [10b] como vueltas, esquivando el nudo en el espacio alrededor. La cadena –nudo imprime su perfil a la sintaxis de esta cadena de letra [10g]

Letra de cadena, ahora; estas expresiones evocan “cabo de hilo”, “silla de caballo”. La Letra, por su trayecto, produce una sintaxis, así como la Cadena determina una estructura de grupo entre los trayectos que se efectúan alrededor de ella .

Quedan sin embargo dos pisos; hablaremos de dos cadenas, de las cuales una es superior a la barra y tal que la otra cadena puede ,o no, cortar la primera. Abrimos aquí una cuestión delicada, que consiste en saber en qué se distingue un trayecto alrededor de un elemento del nudo.

Para hacer discurso y cambiar en su estructura las dos cadenas no deben recortarse en ningún caso [10 h].

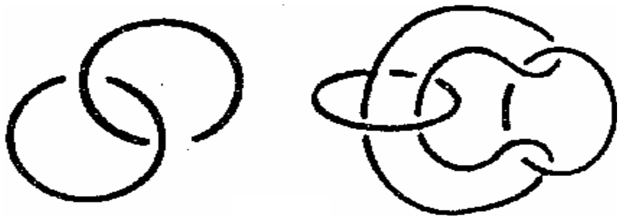
La articulación del significante en términos de cadena y de letra, en tanto que esto confiere al significante su estructura; en tanto ellas dan consistencia al significante, tal articulación no es una representación. El significante no es del mismo registro que la letra. La letra proviene de lo que se escribe. Ella es soporte material, esencialmente localizado

1. Nudo, cadena

Esto nos conduce a algunos matices en los empleos de los términos de nudo y de cadena que corren a lo largo de nuestro texto.

El nudo de los matemáticos es una sumersión de una circunferencia. Para ellos, la cadena es una sumersión de numerosas circunferencias. Algunos dicen de la cadena que es un nudo encajado .Así, nosotros empleamos en los dos casos el término de nudo, indiferentemente, ya sea en el caso de la cadena o de una cadena-nudo.

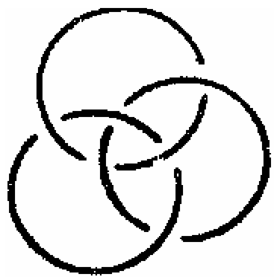
Habiendo planteado esto, tales significantes, nuestros términos continúan deslizándose según la ley del discurso. Así, el término de *cadena* designa el enlace [10 p.8] y los nudos de su familia, caracterizados por el hecho de que cada redondel toma prestado el agujero de los otros redondeles de esta cadena.



cadena nudo

Fig 1

Podemos, así, distinguir el ***nudo o falsa cadena*** [10k] , en la que cada redondel se anuda a los otros sin tomar prestado el agujero de esos otros redondeles. El aplanamiento de este nudo da fe de ello. En el nudo, cada redondel no entra en el agujero de otro redondel más que para volver a salir *enseguida,* siguiendo luego su trayecto.

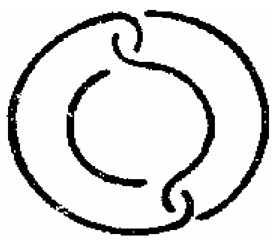


aplanamiento

fig 2

Es la propiedad borromea.

Esta nueva distinción prepara la presentación de falso agujero que consiste en el nudo:



falso- agujero fig.3

¿Por qué distinguir estos dos tipos de nudos? ¿En qué son ellos distintos?

El nudo representa lo que hace sostener el nudo en la cadena. ¿En qué se distinguen, por el nudo? ¿uno toma prestado el agujero, el otro no lo toma?

El nudo que hace sostener el nudo permanece indeciso [10j] en la cadena así formada. El nudo que hace sostener la cadena es asignable en un redondel o en varios.

2. El significante indeciso

Volvemos a nuestra conclusión: el significante uno, notado, S_1 se ilustra particularmente en esos redondeles que se anudan con otros redondeles. Debemos interrogar al nudo que forman entre ellos.

El significante, el "uno" , que está encarnado en *lalangue* permanece indeciso entre los pisos separados de la estructura; semejante al nudo, a entender como lo que representa, para un nudo, lo que hace sostener juntos los redondeles.

Verifiquemos esto considerando 3 ejemplos de cadenas, de las cuales una sola de entre ellas es un nudo.

a) he aquí una cadena cuyo nudo es uno; lo que hace sostener esta cadena es asignable en uno de sus redondeles :

fig 4

Retiramos uno de los dos redondeles extremos; queda una cadena. Al retirar el redondel del medio, no hay más cadena. Así, es este redondel del medio el que hace sostener esta cadena y es en lo que consiste su nudo.

b) He aquí una cadena cuyo nudo no es asignable en ninguno de sus redondeles si no lo es en todos.

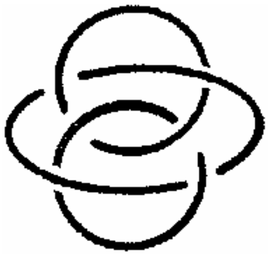


fig 5

Si retiramos uno cualquiera de sus redondeles, queda una cadena. Podemos decir que su nudo no consiste en ninguno de sus redondeles sino en cada uno de los pares de sus redondeles, pues, al retirar dos cualesquiera de ellos, no hay más cadena.

c) He aquí, en fin, un nudo cuyo nudo no es asignable a ninguno de sus redondeles, si no lo es a cada uno .

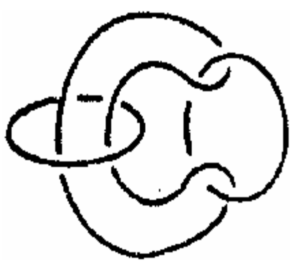
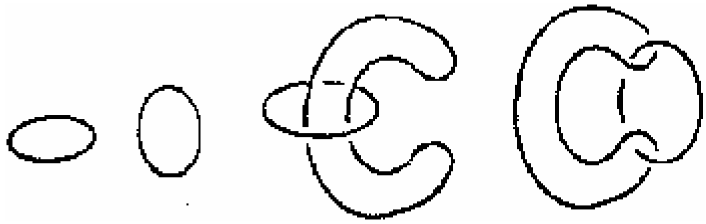


fig 6

Al retirar uno cualquiera de estos redondeles no hay más cadena, pero, no podemos decir, por el hecho de este “uno cualquiera”, que el nudo consiste más en uno que en otro de ellos, por la razón de que consiste también en este otro.



.

fig7

El nudo en tanto que principio del nudo, que representa el orden del nudo por el que toda la cadena subsiste, no es uno cualquiera de los redondeles del nudo.

Es falso que uno cualesquiera sea el nudo, y, es falso que uno cualesquiera no lo sea .[1]

La topología se esboza a partir de este problema que puede ser desarrollado en cadenas que presentan un número de redondeles tan grande como se quiera.

Cuando esta función de los redondeles, de la cual surge que es equivalente para uno entre otros, que sea falso que conviene y que sea falso que no conviene está asegurada; de esta función surge un enjambre , es decir, una multiplicidad de redondeles.

El lector puede ver que esta topología, antes bien que dar respuestas, siempre demasiado precoces en lo que concierne al inconsciente, propone por el contrario, deshacer las ideas recibidas. Es por ello que decepciona a algunos y subvierte los efectos totalitarios del discurso.

3. La cadena significante.

Consideremos ahora un ejemplo de un tal enjambre. Consideremos el ejemplo en la familia de las cadenas *ficheanas* en que consiste la parte prototípica de los nudos borromeos. Estamos, ahora, por estudiar el efecto de la indecisión del nudo, es decir, su estructura, debajo de la barra donde corren las pequeñas letras que se combinan según el orden de esta cadena.

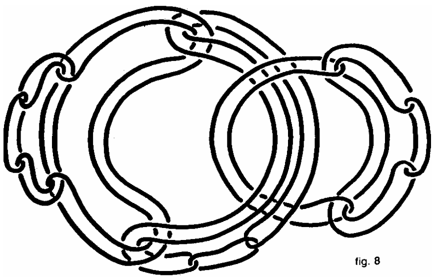


fig 8

Esta cadena de 8 redondeles puede ser presentada de múltiples maneras. Tal como está aquí, podemos decir que está constituida por el enlace de dos anillos, formados cada uno , por un collar hecho él mismo de anillos, de los cuales damos un ejemplar separado de cada uno :

[1] NONS- La topología del sujeto- Fascículo de resultados n° 0.

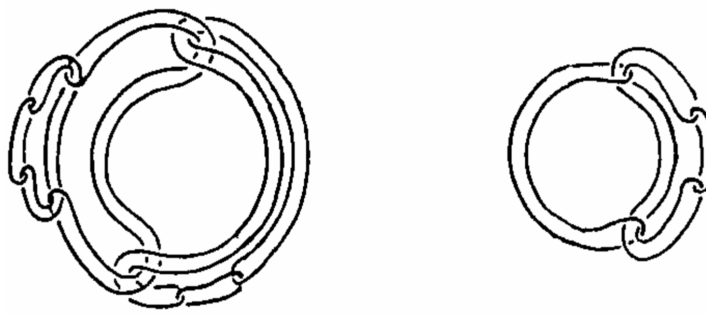


fig. 9

Estos collares separados son inconsistentes en sí mismos, es decir ,que no se sostienen. Son falsos agujeros de múltiples redondeles cada uno. Cinco para el primero, tres para el segundo. La función del enlace es, entonces, la de sellar los anillos. Estos collares están hechos de anillos, ellos mismos collares hechos de anillos. Del primero podemos aislar dos anillos formados por estos collares o falsos agujeros.

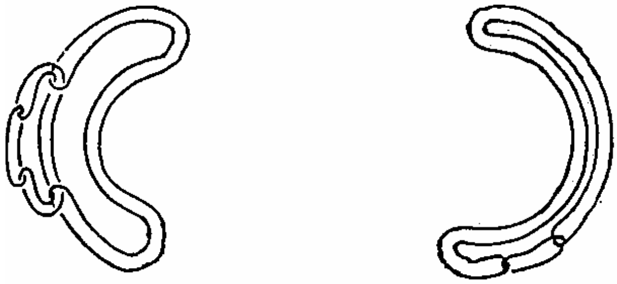


fig 10

La función del falso agujero que se agrega a la del enlace, produce la estructura y se distingue por ello. Permite el desarrollo de donde surge el enjambre significante.

4- Falso agujero

Estudiemos el efecto en la composición de las letras de esta estructura de falso agujero, a fin de ver la economía que ofrece en su lectura.

Retomemos a partir del más simple, hecho de dos redondeles. El cálculo en las zonas en sus campos ,da una palabra típica: .E

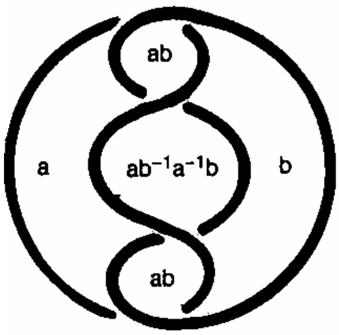


fig 11

No hay relaciones en el grupo de estos dos anillos; la zona central, recibe dos veces la misma denominación.

Existe otra situación que puede, igualmente, encontrarse.

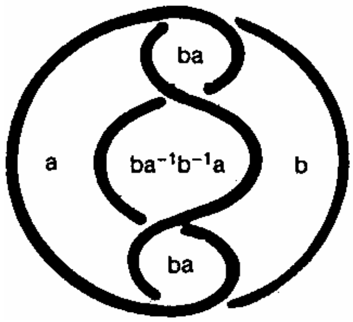


fig 12

El lector observará que una se obtiene de la otra por una rotación en el plano de un medio- giro que transpone el rol de las letras a y b. En los dos casos, la zona más central lleva una expresión que, en álgebra, es llamada: un conmutador.

5. Conmutador

Un conmutador es un elemento del grupo , para nosotros un trayecto , que puede dar su nombre a una zona. Es una palabra escrita con las letras generatrices de nuestro grupo de trayectos. Es una palabra que presenta la notable estructura de estar constituida por la composición de dos palabras cualesquiera, seguidas de la inversa de la primera, seguidas de la inversa de la segunda. O sea una expresión de la forma:

$$ABA^{-1}B^{-1}$$

Para entender el término de conmutador es suficiente señalar que la simple condición para que un conmutador sea neutro, se escribe:

$$ABA^{-1}B^{-1}=1$$

Esta expresión puede convertirse en la de la propiedad de conmutación de los dos términos que entran en su construcción.

$$ABA^{-1}B^{-1}=1$$
$$ABA^{-1}=B$$
$$AB=AB$$

Elegimos adoptar la convención que consiste en notar un conmutador $\mathrm{ABA^{-1}B^{-1}}$ por $(\mathrm{A, B})$, a fin de aligerar nuestras escrituras, y agregamos una última observación a este propósito que confirma la elección del término de conmutador para esta forma, escribiendo la inversa de un conmutador $(\mathrm{ABA^{-1}B^{-1}})^{-1}=\mathrm{BAB^{-1}A^{-1}}$. En efecto, la inversa de una palabra es, por definición, la palabra que, compuesta con aquella de la cual es la inversa, produce el elemento neutro. En consecuencia, cualquiera sea A y B estamos seguros de esta expresión de la inversa del conmutador dado que se trata de escribirla al revés invirtiendo los exponentes por el simple hecho gráfico:

$$\mathrm{ABA^{-1}B^{-1}BAB^{-1}A^{-1}}=1$$

Esta ecuación se resuelve por borramiento sucesivo de los pares de inversos que se obtienen:

$$ABA^{-1}AB^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = 1$$

Así el inverso de un conmutador (A,B) es un conmutador (B,A) cuyos términos están conmutados. Esto puede prestarse a la confusión que hacen algunos entre inversión y conmutación.

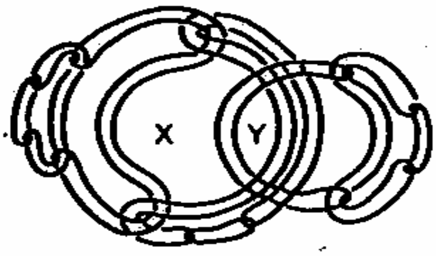
Utilizamos inmediatamente estas definiciones y estos hechos en nuestras escrituras del efecto del enjambre significante.

La zona más central, definida por el anillo de falso agujero, es un conmutador en cada caso , y el más simple :

$$ab^{-1}a^{-1}b = (a,b^{-1}) \quad \text{y} \quad ba^{-1}b^{-1}a = (b,a^{-1})$$

6. Descomposición del enjambre

Damos la descomposición del enjambre de la figura 8 tal cual la habíamos esbozado. La misma se despliega según un árbol



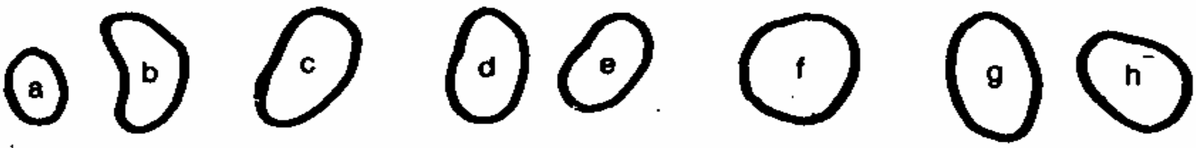
Dos anillos sellados por un enlace

estos anillos son collares que definen falsos agujeros

estos collares están hechos de anillos que están también collares hechos de anillos

fig. 13

Hasta la reducción y la descomposición de cada anillo en sus redondeles simples componentes



7. Efecto literal del enjambre

Esta descomposición da lugar, en el caso de cada falso-agujero, a escrituras de conmutadores que son fuertemente regulares si las comparamos con la complejidad aparente del enjambre.

Formulamos el principio del efecto del falso agujero. Se enuncia así: ya sea que venga de derecha o de izquierda, de arriba o de abajo, el anillo que pasa por arriba viniendo de la zona exterior , ve su letra escrita como inversa y en segundo lugar.

Remontemos el árbol construido en la página precedente:

A partir de abajo $S = ba^{-1}b^{-1}a = (b, a^{-1})$

Luego $Z = (c, S^{-1}) = (c, (b, a^{-1})^{-1}) = (c, (a^{-1}, b))$

$T = (d, e^{-1})$

$R = (g, h^{-1})$

en fin $X = (T, Z^{-1}) = ((d, e^{-1}), (c, (a^{-1}, b))^{-1}$

$=((d, e^{-1}), ((a^{-1}, b), c))$

$Y = (f, R^{-1}) = (f, (g, h^{-1})) = (f, h^{-1}, g))$

Luego, podemos verificar por el cálculo de las zonas que la única relación del grupo del enlace es de la forma:

$XY = YX$ **,o sea ,** $X\,Y\,X^{-1}Y^{-1} = 1$ **o** $(X, Y) = 1$

En nuestro ejemplo, ella se escribe con los resultados obtenidos:

$$(((d,e^{-1}),((a^{-1},b),c)),(f,(h^{-1},g))) = 1$$

Esta se lee con más facilidad en el dibujo, por medio de hacer un principio del efecto de la inversión relativa a las dos presentaciones del falso-agujero.

La relación del grupo del enjambre lo muestra en sus expresiones abreviadas:

$$((T, Z^{-1}), (f, R^{-1})) = 1$$

$$(((d,e^{-1}),(c,S^{-1})^{-1}),(f,(g,h^{-1})^{-1})) = 1$$

Tratamos de hacer la función de la inversión sobre los conmutadores:

$$(((d,e^{-1}),(S^{-1},c)),(f,(h^{-1},g))) = 1$$

a fin de obtener la expresión explícita escribiendo $S = (b, a^{-1})$

$$(((d,e^{-1}),((b,a^{-1})^{-1},c)),(f,(h^{-1},g))) = 1$$

o sea

$$(((d,e^{-1}),((a^{-1},b),c)),(f,(h^{-1},g))) = 1$$

Encontramos, en este enjambrado de letras, un juego de paréntesis bien conocido por los lectores de Lacan

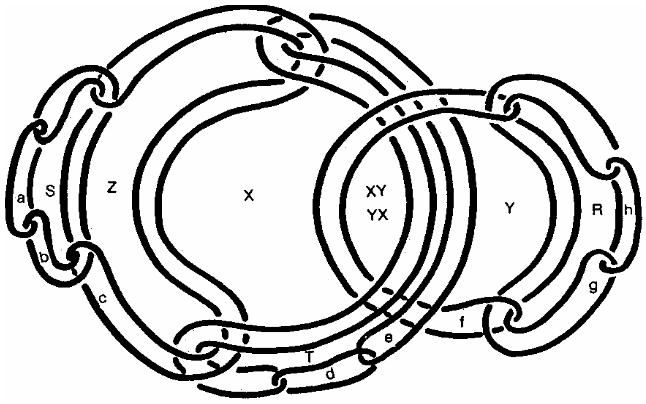


fig 14

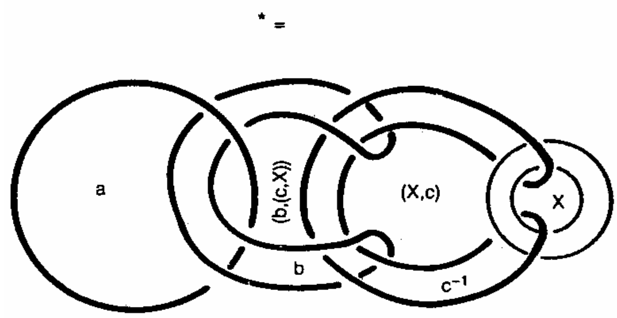
A fin de poner a prueba este formalismo, retomamos, en un ejemplo más simple este juego de palabras y de paréntesis, efecto literal del falso agujero.

8. Envoltura

La descomposición de la cadena, más allá de la facilidad de lectura directa que permite en el dibujo, nos ofrece otro resultado. Cada collar hace anillo, es decir que puede ser envuelto en un toro [9].

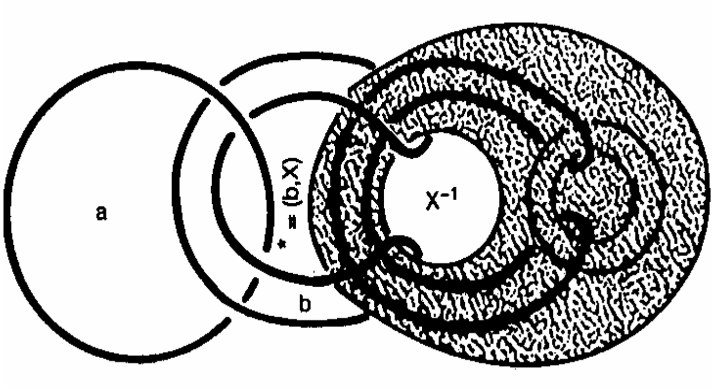
Esta es una consecuencia de la definición de la cadena significante: “anillos cuyo collar se sella en el anillo de otro collar hecho de anillos” [10c] formulada por Lacan en “la instancia de la letra”, si bien en aquella época, las cadenas Borromeas no eran tema en su enseñanza (fecha 14 al 26 de mayo del 57) .

En efecto, cada falso agujero se presta a una tal envoltura en la descomposición que damos

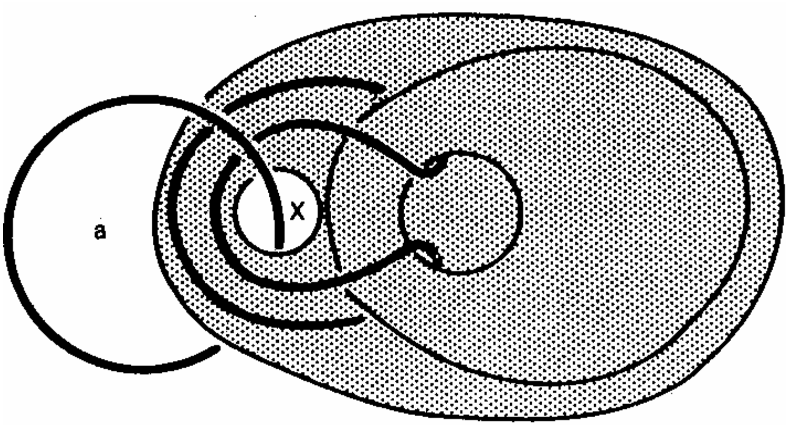


: $(a,(b,(c,X))) = 1$ figura 15

[9] ESTOFA , fascículo de resultados nº2 (las superficies topológicas)



(a,(b,X)) = 1 **fig.16**



(a,X) = 1 **fig 17**

Estas cadenas son borromeas

Otras presentaciones de la misma cadena hacen ver otras envolturas posibles, pero no cualquiera. Una subcadena cualquiera no puede ser envuelta así; en la cadena hay un orden que se debe a aproximaciones particulares de algunos redondeles .

El cálculo de los conmutadores da cuenta de ello, gracias a la relación de conmutatividad del grupo fundamental. La familia de las cadenas ficheanas que presentamos aquí da lugar a un procedimiento conexo a la estructura borromea del nudo. Por el momento, no avanzaremos más por esta vía, a fin de volver sobre ella con otro desarrollo posible

9. Desenvolvimiento

La descomposición de una cadena ,de las más cortas, donde la envoltura que le corresponde, está presentada en un alineamiento de los redondeles, dando lugar a una expresión muy característica de la relación del grupo.

A fin de mostrarla adoptamos algunas simplificaciones del formalismo notando $\mathbf{S_2}$ a cada falso agujero y $\mathbf{S_1}$ a cada anillo simple. La relación de la cadena se escribe:

$$(S_1, S_2) = 1$$

Descomponemos estos falsos agujeros en lo que ellos consisten, sin tener en cuenta los inversos, en una aproximación momentánea. El inverso de un falso agujero se escribe también S_2 y el inverso de un redondel S_1, obtenemos:

$$(S_1,(S_1,S_2))=1$$

y así seguidamente :

$$(S_1,(S_1,(S_1,S_2)))=1$$

$$(S_1,(S_1,(S_1,(S_1,S_2))))=1$$

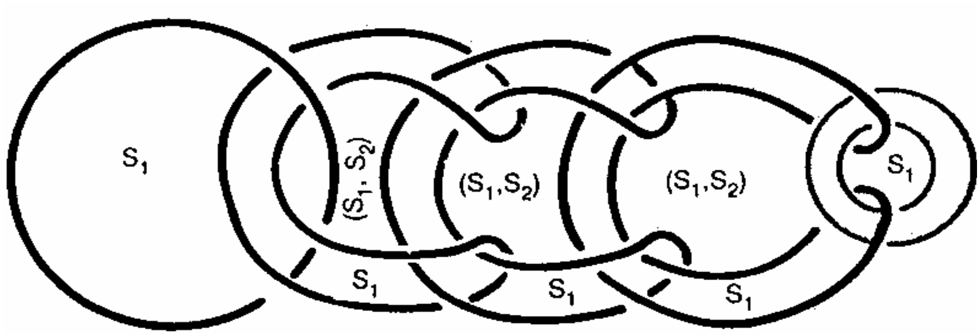


fig 18

En el otro extremo, el S_2 indica que esto puede proseguirse tan lejos como se quiera, a condición de que haya un collar que es necesario para cerrar la cadena.

$$(S_1,(S_1,(S_1,(S_1,S_2))))=1$$

Podemos aproximar esta expresión de la relación de otra dada por Lacan para expresar el enjambre significante en su seminario [10j]

$$S_1(S_1(S_1(S_1 \rightarrow S_2)))=1$$

Esto permite discutir en qué ellas son diferentes.

Teniendo en cuenta las comas inmediatas, encajes de paréntesis son prevalentes en los dos casos. Reposan, en cada caso, sobre una recurrencia de fórmulas diferentes. Damos sus expresiones alrededor de una variable X que va a permitir la repetición, a condición de reemplazar esta X por la formula misma :

$(\mathrm{S}_1, \mathrm{X})$ **para nuestros conmutadores**

$\mathrm{S}_1(\mathrm{X})$ **para la fórmula de Lacan**

La primera es un conmutador; la segunda una expresión funcional. Esta distancia no es muy grande: podemos hacer actuar nuestros conmutadores como funciones.

Vemos ahora en la extremidad de la cadena cómo se cierran estas expresiones. Se trata de mostrar en los dos casos por qué, aL final de la cuenta, es reemplazada la incógnita X , de donde puede salir una serie eventual tan larga como se quiera .

$(S_1, S_2) = 1$ al principio de nuestro cálculo

$S_1 \rightarrow S_2$ en el interior de la escritura de Lacan

Vemos esbozarse un retorno entre la posición exterior del signo igual de la relación de grupo, y la posición interior de la flecha del matema de Lacan.

Los lugares diferentes y las funciones de los paréntesis que se distinguen aquí, explican que para un mismo número de S_1 , una de las expresiones se cierra por el número de paréntesis que acaba la otra, aumentada en uno. Cuatro en la expresión deducida de la cadena, tres en la expresión del seminario.

10. De la cadena significante al enjambre

Hemos encontrado entre las cadenas borromeas que hacen nudo, la cadena significante de la cual se sirve el Dr. Lacan para dar una aproximación del sustrato topológico necesario a la composición del significante según las leyes de un orden cerrado. Luego, hemos probado el alcance de tal aproximación comparándola con la formalización propuesta en el seminario, el año mismo que lleva la marca de una más que seria introducción del nudo en su enseñanza

Esto, que parecía aproximarse al Lacan de la época de “La instancia de la letra”, a saber, la definición de la cadena significante revela tener su exacta presentación topológica. Pero no podríamos sistematizar.

¿Qué es preciso pensar de esta construcción? De sus diferencias con la expresión dada por Lacan se deduce que es falso decir que es la misma cosa. Pero, al mismo tiempo, afirmamos que es falso decir que no es igual.

Proponemos así un avance que no se verificará más que por lo que sigue. Se trata de lo que llamamos, por el hecho mismo de que se escribe, un resultado.

Apéndice

Elementos para una teoría de la representación y del objeto

Capítulo I

GEOMETRÍA

FUNCION INTERNA Y FUNCION EXTERNA DEL GRUPO EN TOPOLOGÍA

(Programa de Erlangen y topología algebraica)

Nuestras consideraciones a propósito de la topología del sujeto, suponen que diferenciemos en lo que sigue , la complejización creciente e infinitista ; en una palabra, todo lo que distinguimos por el término de análisis infinitesimal o análisis funcional .

Esa matemática se ocupa, sin embargo, de cosas importantes, y, es en ella que pensamos, cuando abordamos el estudio de la topología.

Somos llevados a esta posición de simplicidad y de finitud por Desargues, matemático del siglo XVII, muy presente para nosotros. El nos da el ejemplo de llevar la recta infinita a un círculo.

Este movimiento fue marcado por Poincaré al fundar la topología algebraica de la que trataremos en este capítulo

1. Dos usos de la estructura de grupo en geometría

a) Primer uso : El programa de Erlangen (función interna)

Las dificultades provocadas en el cielo del clasicismo por el descubrimiento de las pan-geometrías, consideradas como coherentes y no euclidianas, no han sido esclarecidas y asimiladas sino ,a partir de la distinción entre objetos y relaciones. Se dice que allí la intuición se pierde; nosotros no lo creemos así. De allí que nos refiramos al programa de Erlangen enunciado en 1872 [8].

En ese discurso, el matemático define lo que es una geometría en su mayor generalidad. La cuestión se enuncia así : "***Dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiaremos los seres, desde el***

punto de vista de las propiedades que no están alteradas por las transformaciones del grupo".

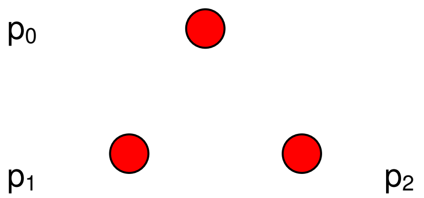
Hallamos, así, el uso y la función de la estructura de grupo en geometría. Ello nos lleva a la cuestión del dominio y del modo de composición.

Tomemos un ejemplo, construyendo aquí una geometría, la más simple, presentando distinciones ,en número suficiente para indicar los matices que nos es preciso subrayar.

1. Multiplicidad

Una multiplicidad es un montón de múltiples granos, una suerte de constelación de partículas cualesquiera que llamaremos elementos, que en geometría llamaremos puntos.

Démonos 3 puntos, esta multiplicidad **Mp**

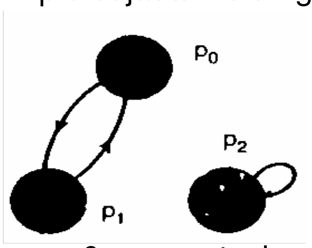


2. Transformaciones

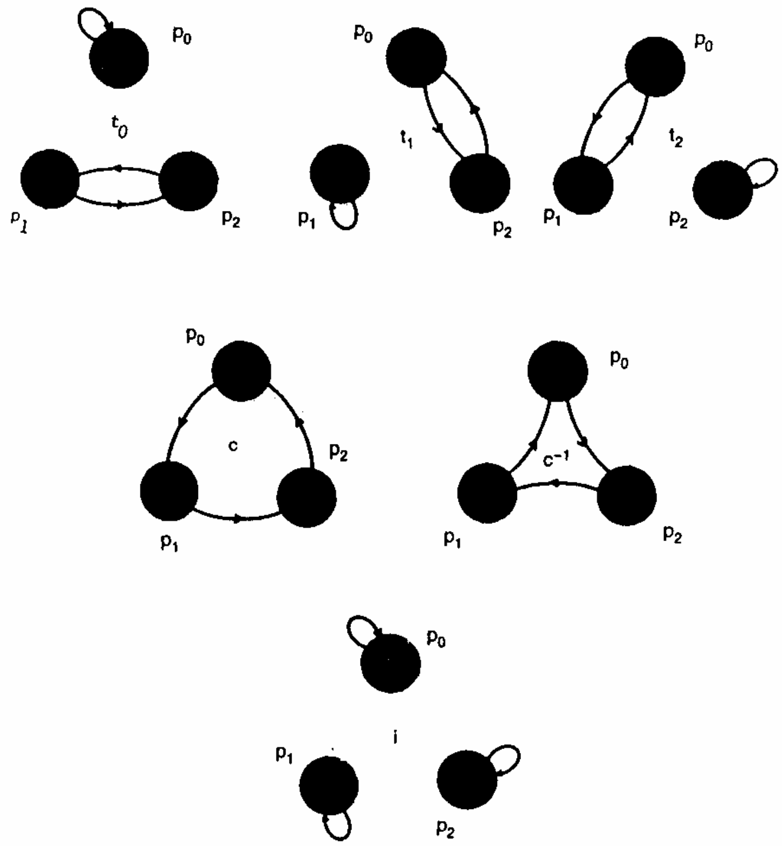
... y un grupo de transformaciones de M_p , bajo el aspecto del conjunto de las permutaciones de nuestros tres puntos .

Una permutación transforma p_0, p_1, p_2 **en** p_1, p_0, p_2, por ejemplo.

Ponemos en imagen esta transposición de dos puntos por una doble flecha en Mp dibujada. Es un grafo orientado



Hay 6 permutaciones de nuestros tres puntos ,repartidas en tres transposiciones (si nombramos así las permutaciones de dos puntos que dejan fijo el tercero), dos permutaciones circulares, haciendo girar nuestros puntos, y finalmente, la identidad que deja fijo cada punto .



El lector puede, bastante fácilmente, verificar la validez de esta composición, constatar que no existen otras y que ellas no se confunden entre sí.

Estas permutaciones forman un grupo porque están articuladas por una ley de composición que consiste en efectuar dos ,sucesivamente. Esta composición es interna porque su resultado es una permutación entre ellas.

He aquí un ejemplo:

$$\begin{tikzcd} p_0, p_1, p_2 \arrow[r, "t_2"'] \arrow[rr, bend right, "c"'] & p_1, p_0, p_2 \arrow[r, "t_1"'] & p_1, p_2, p_0 \end{tikzcd}$$

que resumimos por la fórmula $t_1 t_2 = c$

Pues cualquiera sea **p**: $t_1(t_2(p)) = t_1 t_2(p) = c(p)$

Este modo de composición produce una estructura de grupo. El lector puede seguirnos ahora en el uso geométrico de esta estructura, a condición de notar que para esta composición la identidad es neutra, que las transposiciones son su propia inversa y que las permutaciones circulares son inversas una de otra.

Podemos armar la tabla de estas composiciones. Cuando cada elemento, aparece una y sólo una vez en cada línea y en cada columna de la tabla , tenemos otra manera de probar la presencia de la estructura de grupo, sin recurrir a los axiomas .

2 \ 1	**i**	t_0	t_1	t_2	**c**	c^{-1}

i	i	t_0	t_1	t_2	c	c^{-1}
t_0	t_0	i	c^{-1}	c	t_2	t_1
t_1	t_1	c	i	c^{-1}	t_0	t_2
t_2	t_2	c^{-1}	c	i	t_1	t_0
c	c	t_1	t_2	t_0	c^{-1}	i
c^{-1}	c^{-1}	t_2	t_0	t_1	i	c

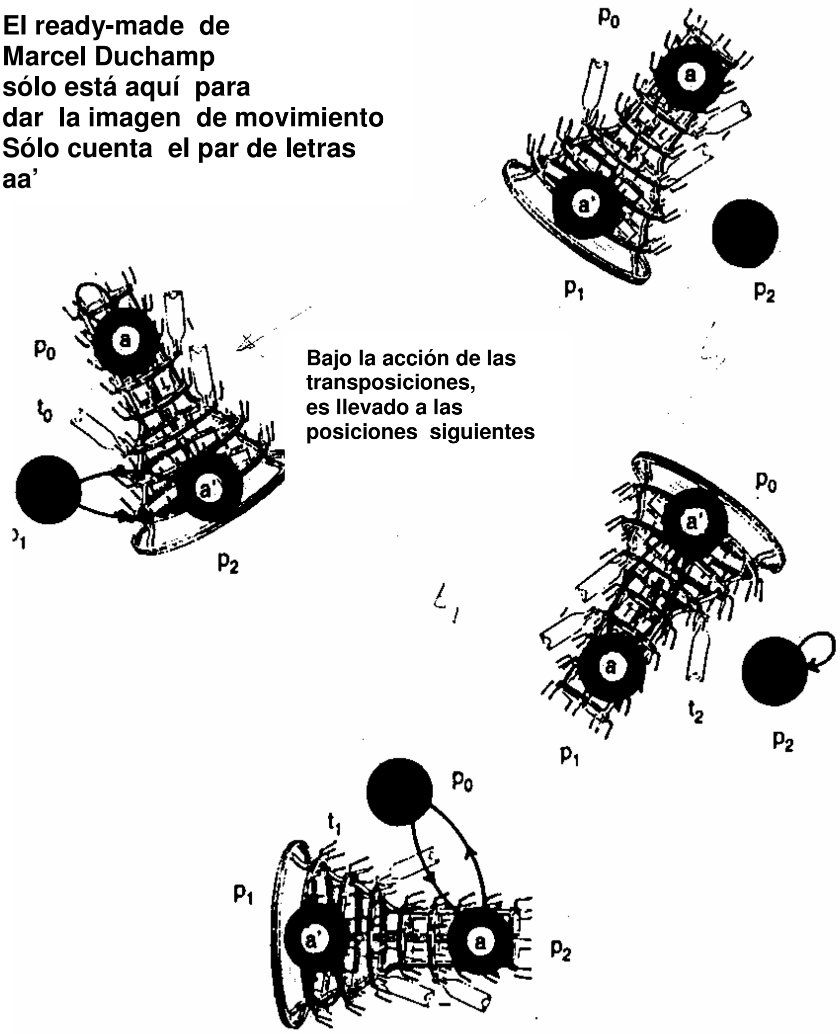
A modo de ejercicio, el lector puede verificar que esta propiedad de los grupos finitos se deduce de los axiomas de la estructura de grupo.

3. Seres geométricos

Los seres que vamos a estudiar desde el punto de vista de las propiedades, y que no son alterados por las permutaciones de este grupo, son letras, pares de letras o ternas de letras que se desplazan en esta multiplicidad .

a) Prenons un couple de lettres aa' dans une position donnée:

El ready-made de
Marcel Duchamp
sólo está aquí para
dar la imagen de movimiento
Sólo cuenta el par de letras
aa'



Bajo la acción de las
transposiciones,
es llevado a las
posiciones siguientes

a) tomemos un par de letras **aa'** en una posición dada :

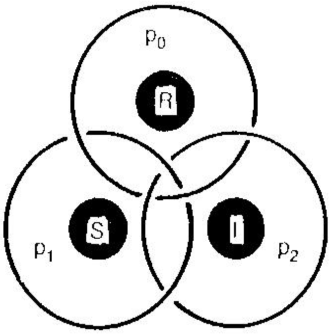
Interpretamos las permutaciones de puntos precedentes como cambios de lugares para las letras entre los puntos designados.

Por el hecho de nuestro grupo, un par puede recorrer cada una de las posiciones definidas por los pares de puntos. Los puntos han devenido sitios.

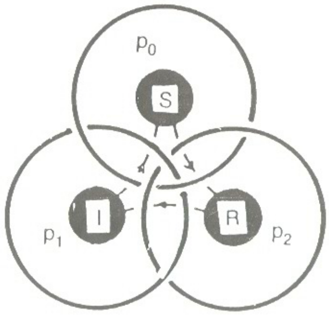
El ser geométrico que es el par de letras, permanece inalterado a través de estas transformaciones. Desde sus puntos de vista ,las propiedades que los caracterizan, son las de ser dos, en dos lugares distintos.

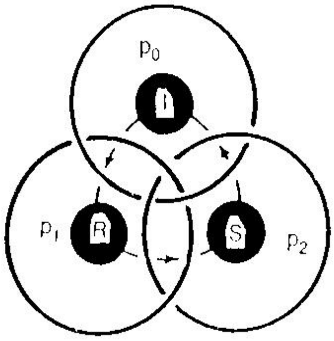
a') Tomemos una terna de letras en una posición cualquiera

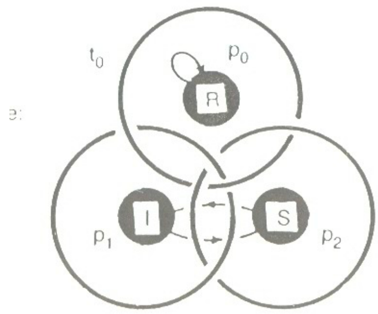
Sólo cuentan los nombres RSI de los redondeles de esta cadena



Las permutaciones circulares actúan sobre ellas de esta manera







La transposición puede ser ilustrada por la situación siguiente

Vemos conservarse la terna por el hecho de que su propiedad de ser tres en lugares diferentes, no es alterada por las transformaciones de nuestra pequeña geometría

No hemos querido representar los pares por vectores , ni los tripletes por triángulos para evitar dar a pensar que las distancias y los ángulos son propiedades inalteradas por esta geometría

Estas propiedades son construibles formalmente en relación con otro dominio. Esta construcción será el objeto del segundo uso de la estructura de grupo en geometría.

Este primer uso subraya el hecho reconocido desde el siglo XIX, que un espacio no está establecido como simple continente, sino por aquello de lo que se trata. Plantea que los elementos primeros que él se da, son ***objetos diferenciales últimos*** (los puntos de nuestro ejemplo) ***y acciones sobre esos primeros objetos*** (las flechas para designar las permutaciones de nuestro ejemplo)

Esta definición de una geometría, da lugar a una estructura de categoría, construcción algebraica más general. Trataremos de esto en el capítulo siguiente (el anexo de este capítulo muestra, sobre el ejemplo de nuestra pequeña geometría, la construcción concreta de una categoría).

En esta presentación del objeto las propiedades que le aseguran su unidad son producidas en estricta dependencia del modo de acción propio de la geometría en cuestión: son los invariantes de nuestra geometría.

De ello se sigue que las transformaciones hacen las cosas de toda geometría. En el ejemplo propuesto, nuestros pares de letras no son nunca tripletes , pues, ninguna transformación de este espacio permite esta confusión. Pero, puede haber geometrías que los confundan , así como otras que distingan seres diferentes allí donde nosotros no vemos sino más que uno .(En nuestro ejemplo es suficiente limitarse a las permutaciones circulares para tener dos tipos de tripletes de letras no- idénticas.

Es difícil entender la topología sin esas nociones.

Retengamos para nuestro uso, que el grupo es la estructura de las transformaciones en su conjunto.

b) Segundo uso :la topología algebraica (función externa)

Nuestro subtítulo indica que tratamos del grupo fundamental del nudo. Es dar a entender que se trata de un curso de ***topología algebraica***

Esta disciplina fue establecida por Poincaré en la prolongación del programa de F. Klein.

Un ***nudo*** está hecho de uno o de varios redondeles (cadena = nudos encajados), dispuestos en un espacio supuesto, de diversas maneras, sin contacto ni con él-mismo ni entre ellos (sumersión del círculo). Se trata de un ser de la topología ,porque admite deformaciones blandas pero permaneciendo él- mismo; o al menos se lo supone.

El nudo presenta una variedad de estas cosas que se conservan bajo la acción de transformaciones continuas. El espacio dejado vacante por el nudo a su alrededor ,es llamado ***la variedad del nudo***

Definir un invariante es hacer corresponder un grupo que no varía como el nudo mismo, a través de estas transformaciones.

Tabla II

ALGEBRA		TOPOLOGÍA
Grupos	←	**Nudos** **Cadenas (varios redondeles)**

En la geometría que hemos construido previamente, el hecho de ser dos para el par de letras y tres para el triplete , es un invariante numérico que preserva las transformaciones del grupo.

Un invariante topológico es un invariante de las transformaciones topológicas. Mejor vale decir ***un invariante de la topología.***

En el caso del grupo, este invariante es algebraico; se trata del ***invariante algebraico de la topología.***

Es así como está definida la ***topología algebraica***. Notemos entonces que el grupo es un rasgo característico de nudo, es decir, un invariante.

De una categoría de objeto , la topología , a otra , la de los grupos del álgebra , existe una correspondencia que está resumida en el esquema. Ella permite dar por descontado que los enigmas de una, se transponen en la otra. Se trata de una operación semejante a aquella con la que Descartes trató la geometría por el álgebra, reemplazando las curvas por sus ecuaciones, creando así la ***geometría analítica .***

En nuestro caso, desde entonces no habría más problema topológico y sólo subsistirían cuestiones de álgebra ,como en geometría clásica.

Observación a propósito de la geometría diferencial

Hacer desaparecer la topología en cálculos standard (clásicos), al precio de una ceguera respecto de otras estructuras, es una operación deseada por algunos en *topología diferencial* (13 p.17 a 23 , especialmente página 22-23). Esta disciplina llamada ***topología de variedades*** estudia los objetos flexibles (variedad topológica) como las superficies y los nudos. Se trata de diluir la topología en la geometría diferencial. Para llegar a ello es suficiente con interesarse sólo en los objetos que se prestan a tal dilución y al punto de vista que los hace desaparecer. Es suficiente decir ,que toda ***variedad*** topológica — y no serán considerados sino estos objetos topológicos — es, por definición, merecedora de una estructura de la geometría diferencial.

Nos preguntamos, entonces, para qué sirve la topología, dado que no son tomados en consideración los objetos que la necesitan: los espacios topológicos cualesquiera , en su mayor generalidad, las relaciones ,en juego entre los objetos que provienen de nuestra topología.

Resta, entonces, una especificidad de la topología en nuestra manera de considerarla: recae sobre la distinción intrínseco/ extrínseco, lo que el título mismo de la obra que citamos indica muy bien [sobre esta cuestión señalamos, también, 15].

2. Hacia la continuación

El primer uso del grupo en geometría , nos hace descubrir un aspecto mas importante para nuestro propósito.

El segundo uso de esta estructura en topología algebraica no es la única razón del interés que tenemos momentáneamente en el grupo

Acabamos de ver que los grupos pueden tener una *función externa* a la topología. Para comprender este abordaje especifico, es preciso hacer intervenir un nuevo orden de hechos.

Damos a seres topológicos (nudo y cadena) una *función interna* al álgebra de los nudos ,grupos , y a una geometría de zonas.

A la manera en la cual F. Klein lo enuncia en su programa, nos proponemos considerar los nudos como transformaciones para una multiplicidad de grupos. Del mismo modo, consideramos los nudos como transformaciones para una multiplicidad de zonas. Si nos apoyamos sobre lo que se hace en topología algebraica (función externa del grupo) nos desviamos de nuestro propósito pasando al álgebra topológica (función interna del nudo sobre los grupos) y a una geometría topológica [16] (función interna del nudo sobre las zonas, por intermedio de un grupo (ver capítulo V).

Este manual indica una tal etapa que nos permitirá encontrar una pura topología de nudos tratando sobre los nudos (NUDO - Fascículo de resultados n°3).

El nudo o la cadena de nuestra topología ya no es más el objeto de la topología, pero da su estructura al conjunto .El produce la unidad de un objeto aun indefinido. El nudo tiene una función en el registro de las transformaciones, por lo tanto en el de las flechas (se llaman también morfismos)

Es de estructura todo lo que se presta a la pregunta: ¿es uno? A la cual responde inmediatamente la pregunta: ¿es dos? — lo cual no hace todavía una respuesta.

La cadena y la letra ¿son diferentes o son lo mismo? Se plantea habitualmente la pregunta acerca de saber distinguir la letra, del enjambre significante realizado por nuestra cadena. Se trata del objetivo de este manual; él da las bases de su teoría.

Anexo al capítulo I
La geometría deviene álgebra

"El golpe del micropunto de Zapp" ilustra con algunas debilidades, la razón que ha acabado la geometría después de F.Klein. La mostraremos construyendo nuestro ejemplo.


Tiens, la " SCANDINAVIA " figure parmi vos suspects?... C'est curieux, nos services se sont également occupés de cette firme il y a quelque...
MAIS IL S'INTERROMPT SOUDAIN...
Avez-vous une loupe?
Oui,... voi-ci mais...
APRÈS QUELQUES SECONDES D'EXAMEN, BLAKE ANNONCE CALMEMENT...
C'est bien ce que je pensais!
EN TENDANT UNE ENVELOPPE AU CHEF DU LABORATOIRE IL AJOUTE...
Rien ne vous frappe-t-il dans l'en-tête?... regardez bien...
SCANDINAVIA STOCKHOLM
Euh! Non, je... je ne vois rien d'anormal... les lettres...
Je vous conseille de vous concentrer sur la seconde perle de la couronne...
UN PEU SURPRIS, LE FONCTIONNAIRE OBÉIT ET...
... PRESQUE AUSSITÔT IL POUSSE UNE EXCLAMATION DE STUPEUR
Bon sang de bon sang.
ET SANS S'EXPLIQUER DAVANTAGE IL S'ÉLANCE VERS LA PORTE, EMPORTANT LE PRÉCIEUX DOCUMENT...
Une minute patron!!!

¡Mire! La “ESCANDINAVIA” ¿figura entre sus sospechosos? Es curioso. Nuestros servicios también se han ocupado de esta firma; hace algunos...

Pero, de pronto, se interrumpe:

- ¿Tiene usted una lupa?
- Mm… Una…Aquí tiene.

Después de unos segundos de examen, Blake, con dice calmadamente:

- Ah! Es justo lo que yo pensaba!

Y tendiendo un sobre al jefe del laboratorio, agrega:

- ¿No hay nada que le impresione en este encabezamiento? Fíjese bien.

- Eh…no… no veo nada anormal… las letras…

- Le sugiero concentrar su atención sobre la segunda perla de la corona.

Un poco sorprendido el funcionario obedece. Casi enseguida, suelta una exclamación de estupor:

- ¡Será posible!

Y, sin explicar mucho más, se lanza hacia la puerta llevándose el precioso documento.

- Un minuto, jefe …

Apenas Blake cuelga el receptor, Pradier, que ha esperado no sin impaciencia el fin de la comunicación, exclama:

- Entonces, mi estimado, ¿me dirá usted al fin que es lo que advirtió en este sobre que ha puesto a Durand en ese estado? –

- Ah! no es un gran misterio; verá.

- Al examinar la viñeta impresa en el sobre, advertí de que una de las perlas de la corona brillaba bajo la luz y deduje que esa perla es, en realidad, un microfilm con preciosas indicaciones para nosotros.

- ¡Caramba! ¡El golpe del micro punto de Zapp! ¿Cómo diablos, ese burro de Durand ha podido…?

- No lo agobie, para él era un trabajo corriente, sin un objetivo preciso, mientras que para mí la “Escandinavia” era, en cambio, un viejo conocido. Por otra parte, la astucia consistía, aquí, en hacer pasar el “punto” como un elemento decorativo y no como una puntuación, como era el caso de los micropuntos de Zapp (célebre profesor alemán inventor del sistema)

- A propósito… ¿Quién es el representante de esta firma en París?…

- Ah! ¡Un nombre inverosímil! Espere, es un tal PER ENRIK QUARNSTRO, importador -exportador. Averiguaré sobre él; llamaré al archivo... Quién sabe...

Mientras tanto, Durand hace su reaparición.

- ¡He aquí la ampliación de la perla! pero, por lo que veo en el mensaje, no se entiende nada.

Inclinados ahora sobre la foto todavía húmeda, Bradier y Blake distinguen en ella una larga serie de ***cifras*** *dispuestas en grupos.*

Retomemos el programa d'Erlangen a partir de un curso de matemática más reciente ,que permite poner en serie las consecuencias del mismo.

La geometría elemental puede ser considerada como el estudio de las “figuras iguales” o el estudio de las “propiedades intrínsecas de una figura”.

Estas dos nociones tienen el mismo concepto subyacente, a saber, el de una familia **G** de transformaciones permitidas en el marco de la geometría considerada: ya sea el desplazamiento en geometría métrica y la transformación lineal en geometría afín , etc. .

Dos figuras F_1 y F_2 son iguales si existe una transformación de **G** que lleva a F_1 sobre F_2

El hecho de que si F_1 es “ igual” a F_2 , F_2 es “igual” a F_3 conlleva que F_1 es “igual” a F_3 , implica que el producto de transformaciones de **G** es una transformación de **G**. Más generalmente, el hecho de que la relación de “igualdad” para las figuras sea una relación de equivalencia, se traduce en el hecho de que **G** es un grupo. [13].

Vemos mejor, así, la función de la estructura de grupo planteada hasta aquí como necesaria.

Consiste en asegurar la identidad de los seres geométricos estudiados bajo el efecto del grupo, aquí, las figuras. Son los objetos geométricos en general, triángulos, rectas o círculos etc. La estructura de grupo asegura la identidad de los objetos estudiados en el sentido en que ellos hacen uno.

Idénticos a través de diferentes estados, ellos pueden, así, ser identificados como un mismo objeto habiendo sufrido las transformaciones que forman el grupo de la geometría. Tómese un subgrupo de este grupo y los objetos se demultiplican. Tómese una extensión de este grupo, los objetos se identifican para reducirse en número.

Prosigamos un poco en este curso:

“Desde este punto de vista, una geometría es el dato de un espacio ***V****, provisto de un grupo de transformaciones de* ***G****. Se supondrá que* ***G*** *es transitivo, es decir, que dos puntos x, x’ cualesquiera de* ***V*** *son equivalentes bajo la acción de* ***G*** *“. [13]*

Esto dice, una vez más, que los puntos de nuestra multiplicidad, dato inicial de toda geometría, son ellos mismos objetos. En sentido corriente, los objetos diferenciales últimos son los más pequeños o los elementos más simples, pero, son, ciertamente objetos.

Hechas estas precisiones y cumplidas estas condiciones, concluimos con este matemático, aportando una observación esencial a nuestro propósito:

*"Entonces **V** se identifica al espacio cociente* $\frac{G}{H}$ *donde **H** es el subgrupo de **G**, dejando estable un elemento fijo de **V** " [13]*

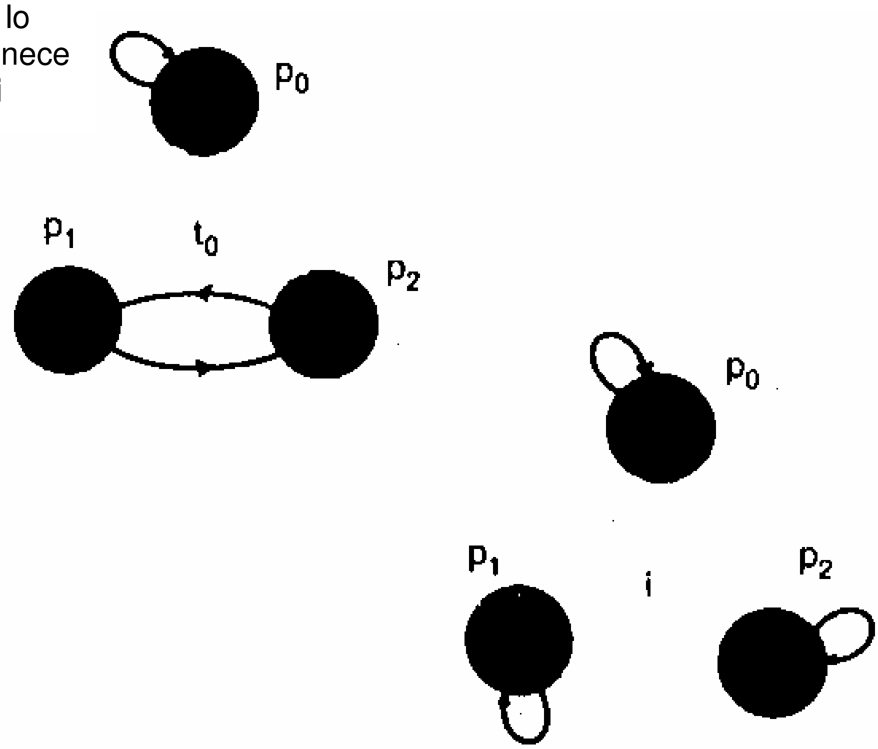
De estas condiciones que hacen una geometría, se puede deducir que nuestra multiplicidad de partida, dominio estable, finito o infinito, piso de la construcción, se revela como siendo de arena. Vamos a demostrarlo

Esta multiplicidad deviene un ser algebraico, que no es verdadero dibujar, sino que conviene escribir, pues, ahora se escribe de manera estricta y más justa

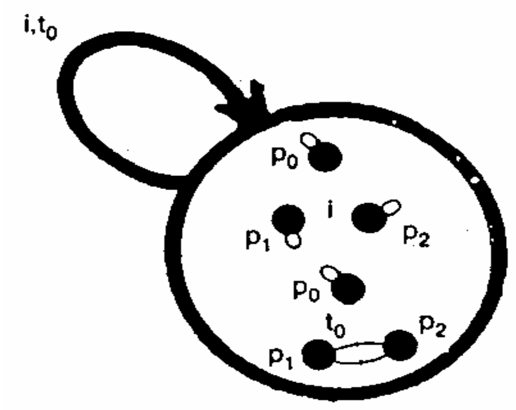
Dibujémosla, no obstante, en el caso de nuestro ejemplo de una geometría rudimentaria.

Para ello, debemos aislar un subgrupo de nuestro grupo de permutaciones, dejando fijo un punto. El punto notado $\mathbf{p_0}$, por ejemplo, se presta a esta operación de igual modo que otro.

Dos permutaciones no lo hacen mover; $\mathbf{p_0}$ permanece imperturbable por $\mathbf{t_0}$ e **i**

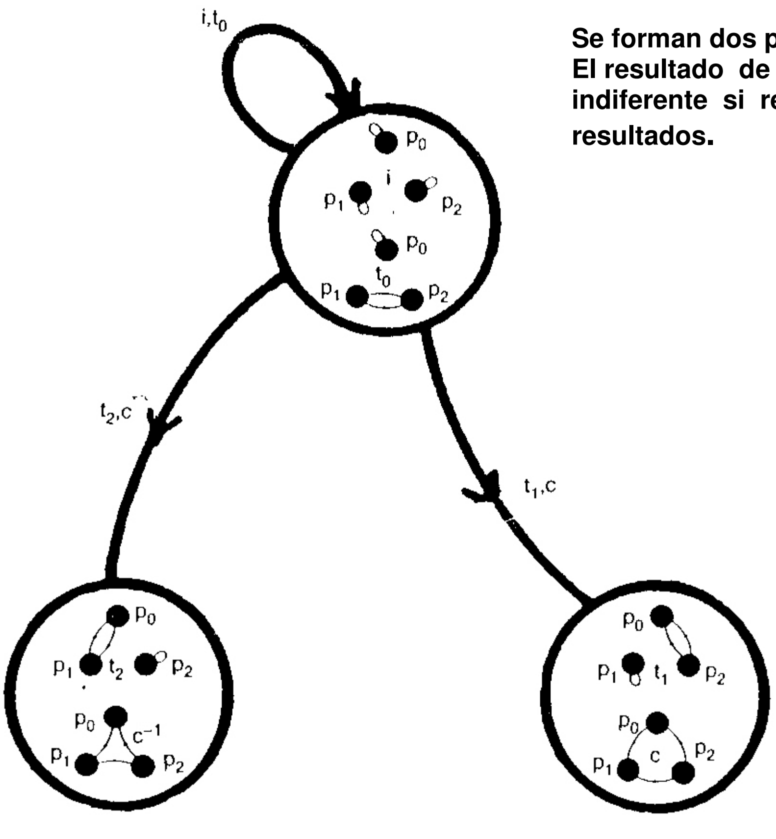


Si componemos estas dos permutaciones entre sí, son las que encontramos como resultados de estas composiciones.



Así, notamos este hecho por una flecha que vuelve sobre sí misma. Ella lleva el nombre de estos dos elementos y apunta a un círculo que rodea nuestros dos elementos.

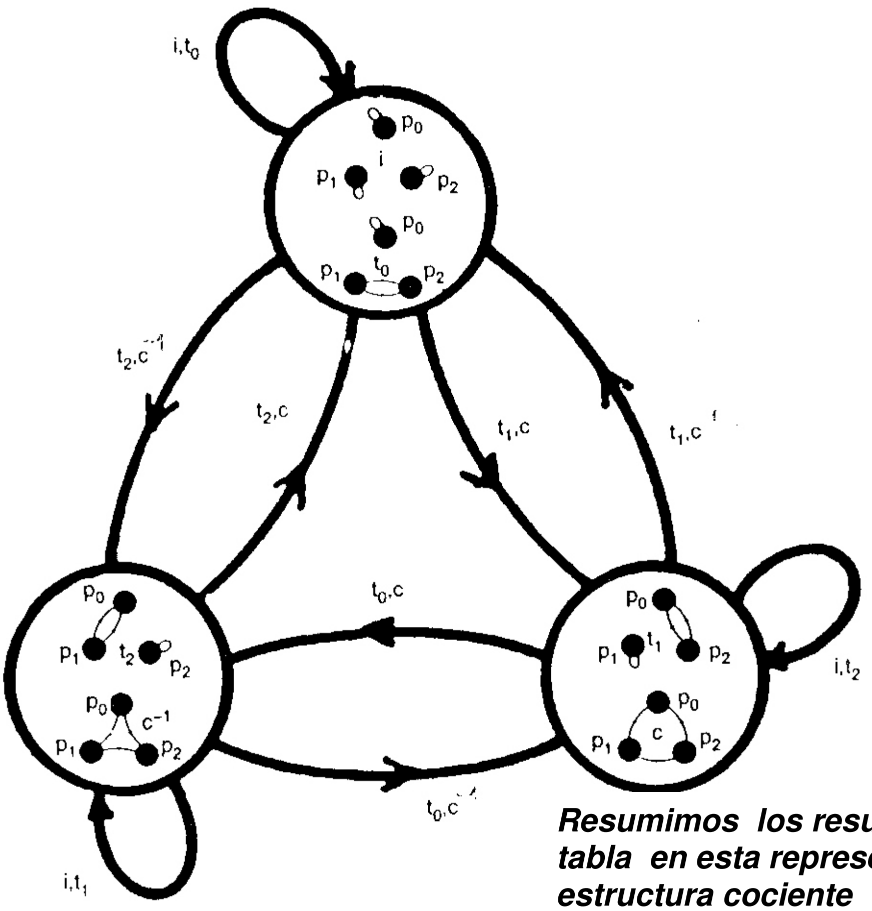
Esta clase constituye para nuestro ejemplo, el subgrupo **H**. Para obtener las otras clases de permutaciones equivalentes en este cociente, que consiste en una partición del grupo, es suficiente componer las transformaciones que restan (4 para nuestro ejemplo) con las que acabamos de cercar .



Se forman dos pares de transformaciones. El resultado de estas composiciones es indiferente si reagrupamos de a dos los resultados.

Para convencerse de ello, el lector deberá efectuar estas composiciones. Puede dirigirse a la tabla (p.101)

Quedan por efectuar las otras posibilidades de composiciones relativas a cada clase así obtenida, cercada con un círculo . Encontramos los resultados resumidos en la representación de la estructura cociente dibujada así:



Resumimos los resultados de la tabla en esta representación de la estructura cociente

Esta representación de un cociente de grupo nos permite presentar algunos conceptos concernientes al objeto de la topología.

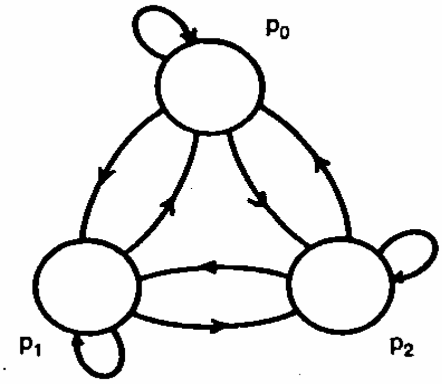
Hay una estructura que nos aproxima al por qué los matemáticos recientes rechazan recurrir a los dibujos.

Tenemos, en este capítulo, dibujada una geometría muy simple que se encuentra repartida en cada uno de los redondeles de esta representación .No se trata de un simple esquema.

La multiplicidad que es el dato inicial para construir una geometría, está dibujada por tres puntos notados por tres letras.

Encontramos seis representantes de esta multiplicidad , distribuidos dos a dos en cada uno de estos redondeles.

Pero, el matemático nos dice que esta multiplicidad, el espacio V del cual es cuestión, se identifica al espacio cociente representado por el conjunto de la representación. Podemos constatar que la multiplicidad es el conjunto formado por nuestros tres redondeles.



Así, en cada objeto (los redondeles) de esta representación de la multiplicidad, encontramos dos representantes de esta representación de esta multiplicidad de partida.

Este comentario presenta la geometría según la estructura de un chiste. Es un Witz que nos sostiene en la afirmación de que este esquema es una escritura. Si presenta una estructura es porque su mecanismo es homólogo al del chiste, por ejemplo, al del cuchillo sin mango que había perdido su hoja. Lo llamaremos el efecto **encajado**

Cada uno de estos elementos ¿está en la representación en su conjunto o está en cada objeto en la ocasión de cada representante de esta multiplicidad , para ilustrar las permutaciones que allí se identifican?

Cada objeto de la multiplicidad es, él mismo, una multiplicidad. Grano de arena, revela ser un conjunto de elementos, y, es al hacer un todo como vuelve a ser una partícula elemental.

La matemática afirma por medio de la identificación del espacio V al cociente de grupo (que no es un grupo cociente), que ***los elementos del espacio son clases de equivalencia de permutaciones de los elementos del espacio***. Leemos, efectivamente una doble posición de estos elementos y comprendemos por qué existe una reticencia a no dibujarlos en ninguna parte.

Esta actitud se justifica por una oscilación entre las representaciones de cosas y una representación de las clases de transformaciones entre las cosas.

Encontramos un medio menos imaginativo que articulado, de aproximar la distinción introducida por Freud entre representaciones de cosas y representaciones de palabras, entre las cuales el sujeto no distingue, como es el caso en la psicosis.

Comprendemos la repugnancia de los matemáticos a utilizar este tipo de proceso. Esta representación permite también hablar, sobre un ejemplo, de la estructura cuyo lenguaje buscamos presentar. Ella nos introduce en el capítulo siguiente con mas facilidad.

El espacio cociente del grupo, no es un grupo cociente. Para que el cociente sea un grupo, es necesario que el subgrupo **H** presente una propiedad suplementaria (para que el espacio cociente sea un grupo, es necesario que **H** esté distinguido, es decir, que para todo elemento **g** de **G,** $gHg^{-1} = H$ **,** lo que se produce si **G** es conmutativo.

Así, la geometría supone un grupo, pero ella misma no es un grupo.

Se trata de una categoría en el sentido técnico del término. Vemos, por qué, esta estructura muy general , es axiomatizada a partir de flechas y de objetos supuestos desde el principio. Aquí son nuestros redondeles los que hacen objetos , y nuestras flechas las que valen como familias de flechas (en nuestro ejemplo se trata de familias poco numerosas ya que ellas son de dos flechas).

El término de objeto tiene, entonces, un empleo más estricto que el encontrado en lo que precede.

Hemos visto que los puntos son objetos entre otros, si entendemos por ello estos seres o figuras estudiados por la geometría. Esta concepción es corriente cuando se habla de las variedades topológicas: toro, cross-cap, banda de Möebius nudos. Decimos que ellos son objetos topológicos.

Los puntos son los objetos y no hablamos más de seres que se les asemejen, a menos que se los reporte en un punto, es decir, en un objeto , fuente y fin de Flechas en otra categoría.

Agreguemos, para terminar, que esta categoría es muy particular, pues, podemos leer el elemento neutro del grupo de nuestra geometría, cada vez, como flecha que retorna sobre el objeto del cual ha partido; diremos ,como automorfismo.

Esta particularidad atinente al grupo de la geometría, es necesaria para asegurar la identidad de los seres geométricos que podemos estudiar en esta estructura.

Ejercicio:

Construir la geometría de las permutaciones que actúan sobre una multiplicidad de cuatro puntos. Podemos, también, construir la representación de la categoría cociente de su grupo de transformaciones.

La solución de este ejercicio es de uso importante en la lectura de Lacan (Algebra de los cuatro discursos, por ejemplo)

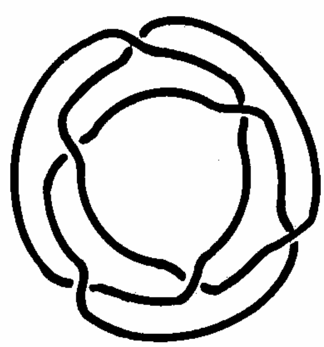
CAPITULO II
CATEGORIA & GRUPO

Objetos, relación en topología
(Ajuste de la cadena alrededor de las letras)

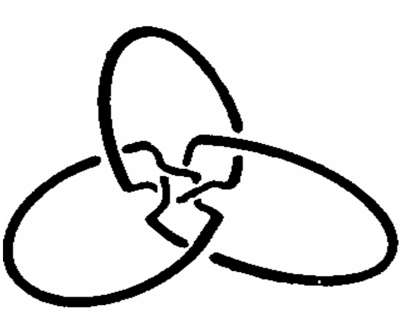
¿Cual es el objeto a la vez integral y concreto de la topología? La pregunta es particularmente difícil y nosotros nos limitaremos a hacer captar esta dificultad.

Otras ciencias operan sobre objetos dados de antemano, que pueden ser luego considerados según diferentes puntos de vista. En nuestro dominio no hay nada parecido. Si se construye el nudo de la familia de los borromeos:

Un observador superficial estará tentado de ver allí un objeto topológico concreto. Sin embargo, un examen mas atento, permitirá encontrar allí, sucesivamente, tres o cuatro características perfectamente diferentes según la manera en la cual se lo considere:

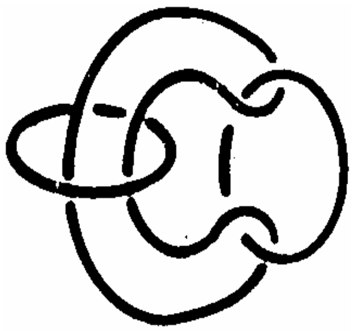


ya sea como una madeja



,

como un nudo trébol provisto de un triskel



o como un falso agujero enlazado con un agujero

Dejamos al lector el cuidado de experimentar por sí mismo estos diferentes puntos de vista.

Lejos de decir que el objeto precede al punto de vista, se dirá que es el punto de vista el que crea el objeto. Por otra parte, nada permite decidir de antemano si una de estas maneras de considerar el hecho en cuestión, es anterior o superior a las otras.

Además, cualquiera que sea el punto de vista que se adopte, el fenómeno topológico presenta perpetuamente dos caras que se corresponden y de las cuales una no vale más que por la otra. Por ejemplo:

1°: Los dibujos que mostramos son objetos construibles en modelos físicos, pero ningún material tiene la flexibilidad necesaria para la realización de las transformaciones que efectuamos.

Así, un objeto no existe sino por la correspondencia de estos dos aspectos. No se puede reducir los dibujos a modelos ni desprender los dibujos de estos modelos.

Recíprocamente, no se pueden definir las transformaciones que practicamos si uno se saltea los dibujos siendo que ellos están articulados.

2° Si admitimos que la letra (o el punto geométrico) es un elemento simple, ¿podemos considerar que es ella la que hace la topología? Ella no es más que el instrumento de la articulación y no existe por sí misma. Surge así una nueva y temible correspondencia: la letra (o el punto), unidad matemático-gráfica, forma a su vez ,una unidad compleja, consistente y conjuntista con las relaciones. Lo hemos mostrado precedentemente para el punto geométrico.

Es igual para la unidad del objeto geométrica y topológica que depende de una demultiplicación de la identidad.

De cualquier lado que se aborde la cuestión, el objeto integral de la topología, no se nos ofrece en ninguna parte. Encontramos este dilema por todas partes: o bien nos apegamos a un solo aspecto de cada problema y nos arriesgamos a no percibir las dualidades señaladas más arriba, o bien, si estudiamos las dimensiones del espacio por varios lados a la vez, el objeto de la topología nos aparece como un montón confuso de elementos heteróclitos sin lazo entre sí.

Cuando se procede así, se vuelve a la métrica (Geometría métrica euclidiana) que separamos netamente de la topología, pero que, gracias a un método incorrecto, podría reivindicar al espacio como su objeto exclusivo.

Para nosotros, no hay más que una solución a todas estas dificultades. Es preciso ubicarse desde el primer momento en la óptica del programa d'Erlangen de F. Klein

En efecto, entre tantas dualidades, las relaciones entre objetos parecen susceptibles de proveer una definición del objeto. Su ajuste entre diversos invariantes provee un punto de apoyo satisfactorio para la mente.

Es en la ocasión de la estructura de grupo que podemos alcanzar la simplicidad de un *no-punto de vista* con respecto a esta dualidad: son las relaciones entre objetos las que producen los objetos

1. El lenguaje de categorías

Emplear el término categoría, es establecer un concepto matemático, y un lenguaje. Este término designa la estructura más amplia que pueda presentar un dominio tratado por las matemáticas.

Ella consiste en la axiomatización, como para la estructura de grupos, de los datos de una familia de supuestos *objetos* y una familia de flechas, a la manera de la definición de una geometría por F. Klein.

Hemos construido un ejemplo de categoría en el anexo que precede. Retomemos en estos términos, los dos usos de la estructura de grupo en geometría , presentados en el apéndice I

El lenguaje que se deduce de estos términos, nos propone las correspondencias ya evocadas en nuestro texto, que resumimos aquí.

Lenguaje de las categorías	**programa d'Erlangen**
Flechas	**transformaciones**
Objetos	**multiplicidades**
Invariantes	**propiedades**

Diremos de una categoría que es una geometría, cuando la familia de las Flechas admite una estructura de grupo en su conjunto. Para los axiomas de la estructura de categoría ,se puede consultar el Anexo de este capítulo.

No pretendemos formar al lector de esta obra en el lenguaje de categorías, es decir, en la práctica de esta teoría. Nos contentamos con señalar su existencia y con introducir de ese modo una manera de ver y un conjunto de términos que no se imponen sino lentamente en el discurso.

Estas definiciones son aportadas aquí ,sólo para indicar el orden de las dificultades. El lector más versado en las matemáticas puede seguir estas indicaciones , a fin de ver precisarse estas nociones [7].

La teoría de conjuntos da lugar a la categoría más amplia de las matemáticas, la categoría de los conjuntos cuyos objetos son conjuntos y las flechas , las aplicaciones entre ellos.

Estas precisiones permiten repetir simplemente la situación descripta en el capítulo precedente: la topología y el álgebra son dos categorías diferentes.

Ellas no son geometrías por el momento, pues, sus flechas (aplicaciones continuas para una, homomorfismos algebraicos para la otra) no forman necesariamente un grupo algebraico.

La tabla II (p.104) puede ser construida ahora con mayor precisión en lo que concierne a la definición de la topología algebraica.

Tabla III

Categoría 2 : Algebra	
Flecha	**Homomorfismo de grupo**
Objetos	**grupos**

←

Categoría 1 : Topología	
Flecha	**transformaciones continuas**
Objetos	**cadenas nudos**

Entre las dos categorías hay una correspondencia término a término que llamaremos un *functor* como es habitual.

Resumimos la situación en dos diagramas:

1. Una geometría es la acción de un grupo sobre una multiplicidad; anotamos este hecho por una flecha.

$$\begin{array}{c} G \\ \downarrow \\ V \end{array}$$

V no es necesariamente un grupo ,pero este puede ser el caso (ver página 113).

2. La topología algebraica nos propone una correspondencia entre un nudo y un grupo: notamos este hecho por una flecha más gruesa.

$$G' \leftarrow N$$

Ahora bien, este grupo **G'** puede siempre ser construido como sufriendo la acción de otro grupo ,del cual es el cociente (ver anexo del capítulo **II,** llamando a este otro grupo sin relaciones, grupo libre de n generadores; lo notamos **GL(n))**

n letras sin relaciones

n letras con relaciones

$$\begin{tikzcd} \mathbf{GL(n)} \arrow[d, "\mathbf{q}"'] & \\ \mathbf{G'=GL(n) / R'} & \mathbf{N} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Nudo

Cadena

Notamos cuáles son los desplazamientos que podemos operar.

Nuestra propuesta consiste en desplazar la correspondencia entre nudo y grupo. Se trata de hacer llevar esta correspondencia no sobre el grupo sino sobre la acción de un grupo sobre un grupo que se resume en un cociente.

1. Algebra topológica: desplazamiento hacia lo alto

letras **GL(n)**

Nudo

q ← **N**

Cadena

letras **GL(n) / R'**

Este desplazamiento modifica el cuadro precedente

Tabla IV

Categoría 2: ALGEBRA	
Flecha	**homomorfismo de grupo**
Objetos	**grupos**

categoría 1: TOPOLOGIA	
Flecha	**transformaciones continuas**
Objetos	**cadenas** **nudos**

Así, el nudo no corresponde a un grupo, sino a un cociente entre grupos. Es una primera etapa de álgebra topológica.

Este manual proporciona los medios de construir esta situación en cada caso. Sin embargo, esta etapa puede no interesar sino a los matemáticos. Damos las diversas posiciones, pudiendo las mismas ser adoptadas a fin de que el lector decida entre estas dimensiones según su intuición.

2 .Geometría topológica. Desplazamiento hacia abajo

El grupo **G'** puede también ser considerado como actuando sobre uno de sus cocientes. En uno de ellos, encontramos el conjunto de las zonas delimitadas por el aplanamiento del nudo (ver capítulo **III, p.58).** Efectuamos, entonces, un desplazamiento hacia abajo , donde el nudo es puesto en correspondencia con la acción de su grupo fundamental sobre las zonas, notadas por letras.

letras **GL(n)**

↓ **q**

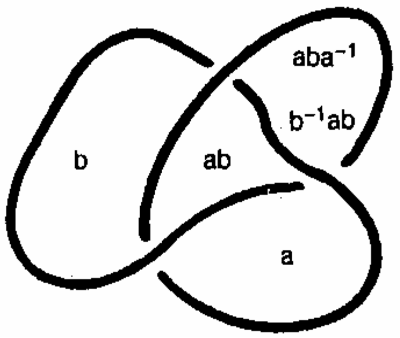
letras **G'=GL(n)/R'**

Nudo

↓ **q'** ← **N**

Cadena

letras **Z⊂ G'' = GL(n) /R'R''**



$$G' = \{a,b / aba^{-1} = b^{-1} ab \}$$

$$Z = \{ t_0,t_1,t_2,c,i\} \subset G' = \{ a,b / a^2 = 1 , (ab)^3 = 1 \} = S_3$$

Esto en el caso del nudo trébol (ver los ejemplos dados en ejercicios en el capítulo V).

Así, por intermedio del grupo, el nudo o la cadena, pueden ser considerados como una geometría restringida. Ella deviene retroactivamente objeto de nuestra topología.

Esta etapa de la elaboración se resume en la tabla siguiente:

Tabla V

	categoría 1 :TOPOLOGÍA	
Flecha	**transformaciones continuas**	
Objeto	**categorías :** **nudo** / **cadena**	**geometría topológica**
	relación: **nudo** / **cadena**	
	objetos: **letras**	

GRUPO

Este manual tiene por función establecer una situación intermedia entre lo que se hace en matemática y nuestra práctica de la topología.

Apuntamos así a la definición de los nudos como categorías de letras (ver anexo a este capítulo). Este movimiento produce un cambio de discurso que se manifiesta en un cuarto de giro al cual está sometido el término de este grupo:

En ocasión de los ejercicios que proponemos al lector, aparece una insuficiencia de la teoría matemática (ver pág. 71).

3. Topología del nudo

Buscamos conducir al conjunto de nuestros lectores a una práctica de la topología y a un uso de la estructura de grupo, que se adquiere por esta práctica misma. Las limitaciones encontradas en esta ocasión conducen a una teoría del nudo que será el objeto del fascículo de resultados n°3. Ella consistirá en ver desaparecer la estructura algebraica estándar , que es el grupo , haciendo actuar el nudo como transformación, no más entre grupos ,sino entre los nudos mismos. El aspecto algebraico no será mantenido entonces sino para producir una topología.

Es a esta cuestión a la que responde el conjunto de esta serie de fascículos de resultados. Presentar la topología del sujeto (fascículo n°0) por la teoría del nudo (fascículo n°3) apoyándola sobre la teoría de superficies (fascículo n°2)

Se trata de adquirir una práctica intuitiva de una escritura que convenga a las formaciones del inconsciente y de estudiar los cambios de valor que se producen allí. Para ello, el lector puede dirigirse a los capítulos IV y V, y verificar, probándolos, estos efectos de letras.

2. Lugar de la intuición en la matemática

Retendremos aquí sólo una cosa. Si por primera vez podemos asignar a la topología un lugar en el campo de Freud , es porque la ligamos a una *intuición*, a condición de que este término esté también castrado, si se pudiera, de su uso metafórico. [10i,p 37]

¿Por qué la intuición no es aun reconocida en matemáticas teniendo como cualquier otro, su dominio propio que es la topología? Es que se gira en un círculo: nada es más propio que la topología para hacer comprender la naturaleza del problema de la intuición; pero, para plantearlo convenientemente, habría que estudiar la topología en su estructura. Ahora bien, hasta hoy se la ha abordado casi siempre a partir de otros puntos de vista.

El gran público no ve en la topología más que una parte de las más recientes de las matemáticas (de allí su reputación de ser difícil).

Están los puntos de vista de los matemáticos que la estudian mediante el análisis funcional, el álgebra y la geometría. Para nosotros, en cambio, el problema topológico es el de una estructura que Bourbaki califica de independiente y basal. Todos nuestros desarrollos toman su significación de este importante hecho.

F .Klein, en la nota II al Programa que él redactara bajo el título "Sobre la importancia de la intuición del espacio" señala la distinción necesaria entre una intuición accesoria (en razón de la naturaleza puramente matemática de las consideraciones a formular) y una intuición del espacio en general. Escribe a este respecto:

"La considero como subsistiendo por ella misma. Existe una geometría propiamente dicha que no puede, como las investigaciones que nos han ocupado, ser más que una forma sensible de consideraciones abstractas…./… Para esta geometría, un modelo que sea ejecutado o examinado o solamente figurado con fuerza, no es un medio para alcanzar un fin, sino la cosa misma "[8].

Klein no conocía los desarrollos topológicos que nos permite abordar con su apercibimiento. Sostenemos que esto mismo es la topología del nudo

ANEXO AL CAPÍTULO II

Axiomas de la estructura de categoría

Llamaremos *functor* a la correspondencia que existe entre dos categorías, tal como es usual , si la misma preserva los modos de composición de una categoría en la otra. Es la menor coherencia que se le puede exigir. Los axiomas que deben respetar los objetos y las flechas formulan estos modos de composición bajo las condiciones preliminares.

1. A todo par de objetos , corresponde una familia de flechas; para dos objetos P y P' ; la notamos **F (P,P').**
2. A todo triplete de objetos corresponde una ley de composición de las flechas.

$$F(P,P') \times F(P',P'') \longrightarrow F(P,P'')$$

Los 3 axiomas son:

A_1: Los conjuntos **$F(P_1,P_1')$** y **$F(P_2,P_2')$** son disjuntos salvo si

$$P_1 = P_2 \quad y \quad P_1' = P_2'$$

A_2 Si $f : P \longrightarrow P'$ y $g: P' \longrightarrow P''$ y $h: P'' \longrightarrow P'''$

$$f(gh) = (fg)h$$

A_3: Para cada objeto **P** hay un morfismo

$$1_P : P \longrightarrow P \text{ tal que para todo}$$

$$f: P \longrightarrow P' \text{ y } g : P' \longrightarrow P$$

se tiene

$$1_P.f = f \quad y \quad g1_P = g$$

ÍNDICE DE TÉRMINOS

La definición no acompaña siempre la primera aparición de cada uno de los términos empleados en el texto. Así, el lector encontrará indicadas dos cifras en la ocasión de cada término: la primera remite a la primera aparición en el texto y la segunda al lugar donde aquel es definido. Hemos adoptado esta manera de presentar las cosas por el hecho de que se aprende, ciertamente, sólo lo que ya se sabe (mathemata-mathema).

escritura
elemento diferencial ultimo
elemento inverso
elemento neutro
elemento opuesto
elemento simétrico
conjunto
enjambre
tapa
hilván
falso agujero
flecha
functor
generado
geometría
geometría analítica
geometría de situación (de posición)
geometría euclidiana(métrica)
geometría proyectiva
geometría sintética
gramática grafo
grafo coloreado de Cayley
grafo de un grupo
grafo euleriano
grafo orientado
grafo orientado completo
grupo
grupo abstracto
grupo conmutativo (abeliano)
grupo cíclico
grupo de Klein
grupo libre
homomorfismo de grupo
intuición
invariante
Letra
letra
literal
ley de composición
mathema
aplanamiento
modelo
morfismo
multiplicidad
nudo
objeto
pangeometría
sumersión de la circunferencia
puentes de Köenigsberg
Programa d'Erlangen

Cociente de grupo
Relación
relación de una presentación de grupo
reparación (de un nudo)
significante
significancia
Vértice
estructura
estructura de grupo
estructura del lenguaje (castración)
sintaxis
topología
topología algebraica
topología diferencial (variedades)
topología del sujeto
topología general (conjuntista)
trayecto alrededor de la cadena o del nudo
trayecto elemental
Valencia (masa)
variedad del nudo
zona

BIBLIOGRAFÍA RELATIVA AL GRUPO FUNDAMENTAL

El lector encontrará aquí una lista de las obras que tratan más particularmente del grupo del nudo, aun llamado grupo fundamental, primer grupo de homotopía o bien, primer grupo de Poincaré

[1] Topología diferencial; Nudos de S^1 en R^3; Grupo de un nudo.- Enciclopedia Universalis.

[2] “Topología básica”
[3]
[4]