

## Graphe des lignes et quotient de graphes

Les deux graphes donnés en note par Lacan dans les *Écrits* entretiennent des relations topologiques élémentaires [*Supra*, p.16-17]. Lacan indique cette relation topologique dans cette même note à la page 56. La relation en question s'appelle dualité. Ici, il s'agit de la construction du graphe des lignes, ou le graphe représentatif des arêtes.

Il existe une transformation réciproque qui n'est pas triviale dans la question des traductions formelles. Il s'agit du quotient de graphe ou identification de graphe.

### 1. Construction du graphe des lignes d'un graphe

Le graphe des lignes d'un graphe est obtenu à partir d'un graphe en transformant les segments du premier réseau en coupure (sommets) du second, et en marquant les chemins orientés joignant ces coupures.

Nous prendrons comme départ de cette construction le graphe des + et -, à partir duquel sont obtenus les deux graphes des 1 2 3 et  $\alpha \beta \gamma \delta$ . Ce graphe n'est pas donné dans les *Écrits*. Il est formé de quatre arêtes orientées reliant les deux sommets + et -.

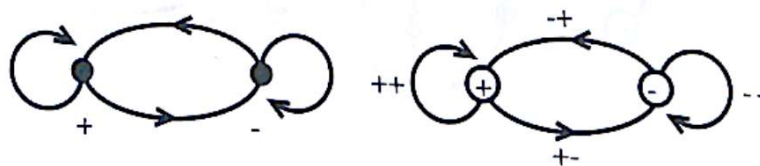
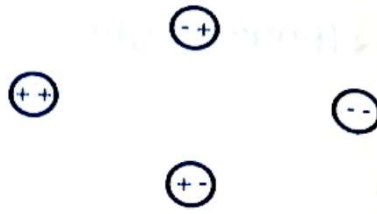


Fig.1

Les arêtes sont nommées par les lettres de leur source et de leur but. En respectant l'orientation de l'arête, la flèche - + indique qu'elle part du sommet - pour atteindre le sommet +.

Construire le graphe des lignes consiste à remplacer, en un premier temps, toutes les arêtes du graphe par des sommets.



Les quatre arêtes sont alors devenues quatre sommets.

Fig.2

Dans le second temps, il s'agit de relier ces sommets par des arêtes orientées lorsque les segments du premier graphe ont une extrémité commune. Les orientations nous viennent des flèches du graphe de départ, c'est-à-dire des parcours orientés possibles sur le graphe.

Ainsi dans le graphe des + et -, nous pouvons emprunter un trajet depuis l'arête - + vers l'arête + - en passant par le sommet +. Ce que nous écrivons d'une arête entre les sommets - + et + -. De même, les arêtes - + et ++ sont aussi connexes par le sommet +, nous traçons l'arête qui va de - + vers ++.

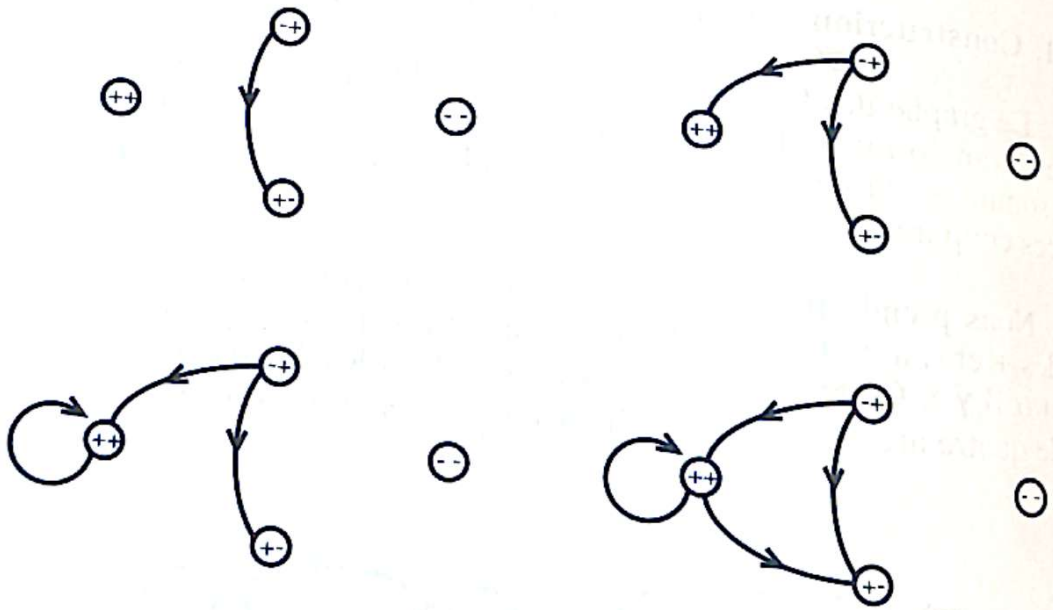


Fig.3

Pour achever la construction nous reportons la connexité des dernières arêtes.

Dans le graphe des lignes, figure 4, la boucle partant du sommet - - pour y retourner représente la connexité de la flèche - - avec elle-même, ceci par le point - du premier graphe. Sur la figure 1, il reste l'adjacence, par ce point -, de l'arête - - avec l'arête - +, ce que nous marquons par une flèche sur le graphe des lignes.

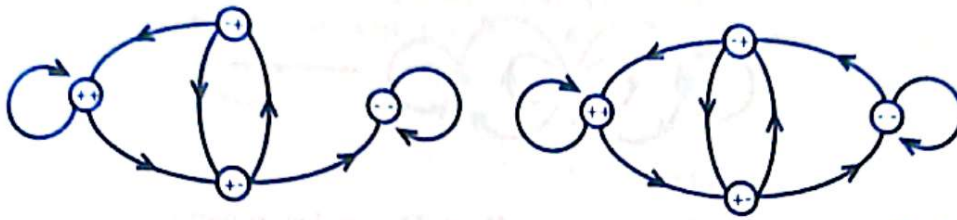


Fig.4

La construction est maintenant achevée.

Ce fait peut se vérifier en remarquant que le nombre d'arêtes arrivant et partant d'un sommet du graphe des lignes doit être égal au nombre de flèches adjacentes à une des arêtes du graphe des + et -.

Par exemple, au sommet + - du second graphe, figure 4, deux arêtes y entrent et deux autres en sortent, en suivant l'orientation. Sur la figure 1, les deux arêtes + + et - + sont connexes à la flèche + - par le point +, et à l'autre extrémité, les deux arêtes - - et + - le sont par le sommet -.

## 2. Quotient par identification d'un graphe orienté

Le graphe quotient est l'identification de certains sommets d'un graphe et de certaines de ses arêtes, qui consiste en une relation d'équivalence compatible avec l'orientation des arêtes.

Repartons du premier graphe donné dans les *Écrits* par Lacan, où nous avons nommé les sommets par les lettres A, B, C et D.

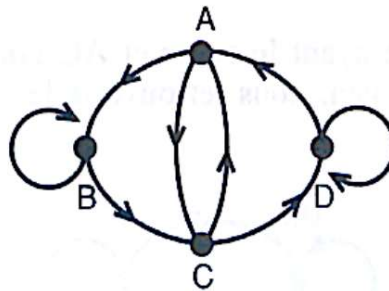


Fig.5

Ce sont les sommets A et C ainsi que les sommets B et D qui seront identifiés en respectant les orientations des arêtes.

En pinçant le graphe pour identifier les sommets A et C, nous obtenons le dessin suivant. Il s'agit aussi d'identifier les deux autres sommets B et D, mais l'orientation des arêtes ne permet pas encore de les identifier. Les flèches DA et AB sont inverses l'une de l'autre si nous voulions de suite rabattre D sur B.

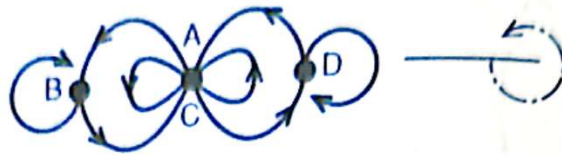


Fig.6

Pour identifier les sommets B et D, en les rabattant l'un sur l'autre, il nous faut effectuer une rotation de la partie droite du graphe, en suivant l'axe de rotation indiqué sur la figure 6.

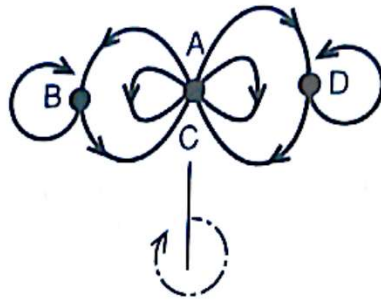


Fig.7

Il reste alors à faire pivoter la partie de droite du graphe pour identifier les deux sommets et les arêtes, ceci en cohérence avec les orientations des flèches.

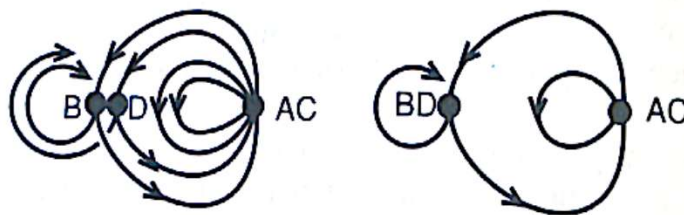


Fig.8

A placer la boucle ayant le sommet AC comme source et but vers l'extérieur du dessin, nous retrouvons le graphe de départ de la figure 1.

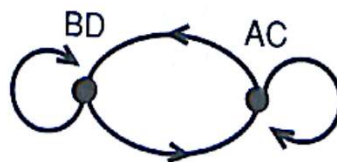


Fig.9

### Conclusion

Les différentes transcriptions et traductions au travers des + et - des 1, 2, 3 et des  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  que Lacan effectue se font en suivant ces deux mouvements topologiques de dualité et de quotientage, qui peuvent être repris en termes d'intrinsèque et d'extrinsèque.

Il s'agit de la première présentation, en termes de graphe, de l'involution signifiante qui est au principe de la topologie de Lacan.

Michel Bertheux  
1991