La coupure en théorie des surfaces

Les surfaces topologiques intrinsèques

Il y a deux présentations élémentaires de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques.

La première construit les objets de la théorie à partir de morceaux de plans, toujours équivalents les uns aux autres, par un principe de montage simple; nous associons son style au nom de Griffith [18].

La seconde produit les objets de la théorie à partir d'un polygone plan à chaque fois, dont il est dit comment se correspondent les côtés deux à deux ; nous associons sa facture au nom de Cartan [11].

Nous voulons montrer où une première difficulté se trouve pour le débutant ; comment ces deux présentations se traduisent l'une en l'autre et par la suite en quoi la coupure, dont nous voulons montrer la fonction structurale en termes de surfaces, résout ces questions. A partir de là, la théorie se développe sans difficultés spéciales et le lecteur peut la trouver dans bon nombre d'excellents ouvrages.

1. La présentation de Griffith

Nous prenons des polygones irréguliers, en carton ou en étoffe par exemple.
Ces éléments de surfaces ne doivent posséder aucune autre singularité, c'est une condition.

Fig.1

Ils sont tous équivalents à un triangle ou à un disque.

Fig2

Nous les assemblons en respectant deux principes de montage.

a_1 - Deux morceaux sont cousus ou collés ensemble le long de deux segments de leurs bords respectifs qui deviendraient une commune frontière entre eux (fig.3).

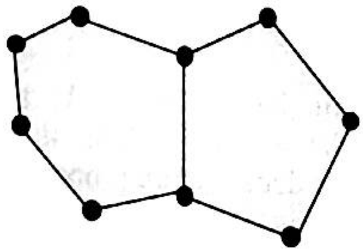
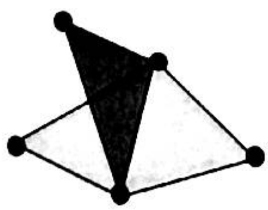
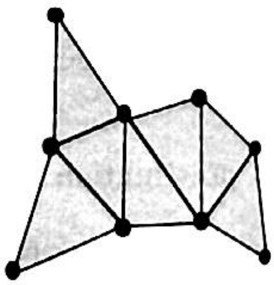


Fig.3

a_2 - Pas plus de deux morceaux ne sont collés ou cousus le long d'un même segment (fig.4).



Montage non admis



Montage admis

Fig.4

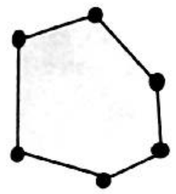
Nous appelerons surface topologique ou étoffe un quelconque assemblage respectant ces deux principes de montage convenant à la condition d'être des portions de plan.

Parmi ces montages certains présentent des caractéristiques topologiques en commun. Ceci permet de faire des classes d'équivalence de ces montages. Nous appelerons surfaces topologiques intrinsèques ces classes d'équivalences. Le premier mouvement de la théorie donne une classification de ces surfaces, autour d'un théorème important[1] .

Du bord

L'intérêt majeur de cette présentation tient dans le traitement intuitif et très simple de la notion de bord.

Chaque élément de montage a un bord, polygonal, facile à désigner intuitivement. Le bord d'un montage est la somme des ses bords élémentaires diminuée des segments qui ont servi au montage (fig.5).

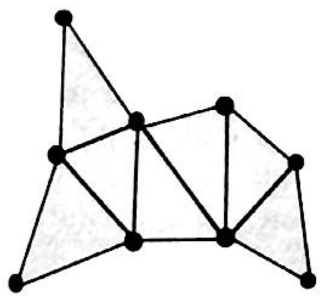


Bord d'un élément

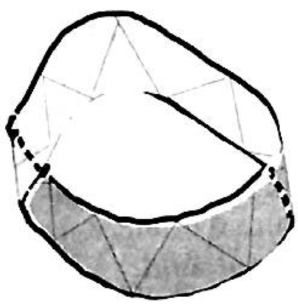
Bord d'un montage

Fig.5

Une petite logique du bord s'ébauche à partir de là, si le lecteur fait l'expérience de construire quelques exemplaires, en compliquant le problème au maximum. Il peut se rendre compte que le bord peut subitement présenter deux composants alors qu'il n'était au début constitué que d'un élément, qui faisait un cycle autour des premiers montages (fig.6).



Un composant de bord



Deux composants de bord

Fig.6

Il y a dans cette présentation des surfaces avec bord et des surfaces sans bord. Nous pouvons toujours annuler tous les composants de bord restants grâce à des pastilles dont les bords sont décomposés en segments.

[1]. *Étoffe*, p.88.

2. La présentation de Cartan

Un représentant de la classe d'équivalence qu'est une surface topologique intrinsèque sans bord est réalisé à partir d'un polygone plan ayant un nombre pair de côtés. Ses côtés sont orientés et indexés de façon à se correspondre deux à deux, comme le montre la figure 7.

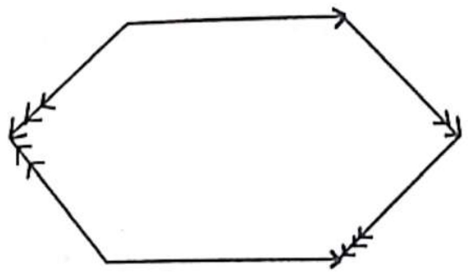


Fig.7

Ce schéma indique que les côtés portant le même nombre de chevrons doivent être identifiés en respectant l'orientation indiquée par cette sorte de flèche. L'inconvénient de cette présentation tient dans le caractère peu réalisable des montages en question, faute de disposer d'un matériau assez souple. Elle a par contre l'avantage de ne pas être trompeuse sur le caractère effectif des objets réels de la théorie qui sont des fictions de surfaces.

3. Une première difficulté commune à chaque ouvrage traitant de ces questions

Les choses commencent à se compliquer lorsque nous voulons être plus précis dans le traitement du bord dans la présentation de Griffith. Lorsque nous voulons orienter le bord, lorqu'il est nécessaire d'orienter le bord afin d'obtenir une écriture correcte de cette question.

a_1 - Apportons une première précision importante dans cette difficulté. Nous pouvons nous proposer de donner une version en couleur de la présentation de Griffith afin de rendre compte de l'orientation des morceaux d'étoffe et par conséquent de leur bord.

Reprenons la construction en nous fournissant des morceaux d'étoffe réversibles dont chaque côté, comme on dit, en fait chaque face est de couleur différente (rouge et vert fig.8).

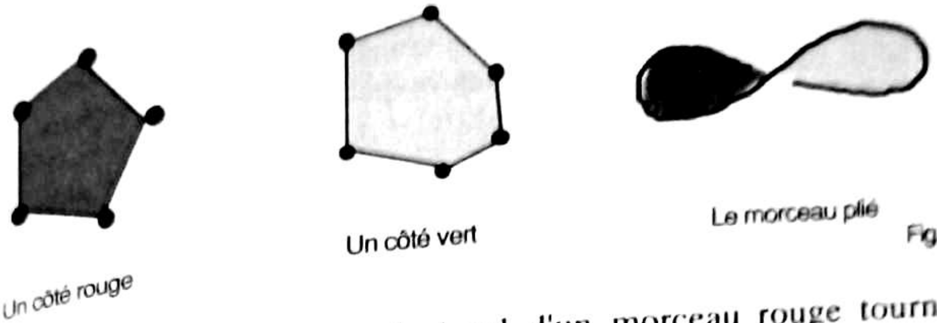


Fig.8

Et convenons de dire que le bord d'un morceau rouge tourne dans le sens positif, que le bord d'un morceau vert tourne dans le sens négatif, (fig.9).

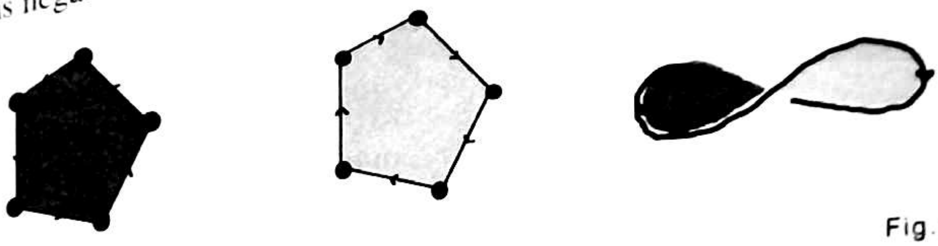


Fig.9

C'est de fait respecter ce qui se produit lorsque nous retournons le morceau d'étoffe comme une crêpe.

Nous adoptons donc la convention suivante, résumée en deux petits dessins,


Fig.10

où l'orientation [2] du bord d'un morceau coloré d'une seule couleur dépend de la couleur de ce morceau d'étoffe. La couleur se répand dans le bord comme une orientation de ce bord (fig.10).

Nous construisons par là un modèle de la théorie des surfaces qui convient à ce que nous voulons montrer.

Il apparaît alors une distinction qui n'est pas négligeable dans le montage des morceaux élémentaires, ces morceaux de sphère ou de plan qui ne présentent aucune singularité. Du fait de leur

---

[2]. La question de nommer ces deux sens de l'orientation négatif-positif, gauche-droite, lévogyre-dextrogyre occupe aussi la physique moléculaire.

coloration il sera sensible au lecteur que le résultat du montage n'est pas le même selon que nous cousons deux morceaux d'étoffe de telle manière que leurs faces respectives de même couleur se trouvent conjointes par la couture, ou que celle-ci réunisse deux faces de couleurs différentes (fig.11).

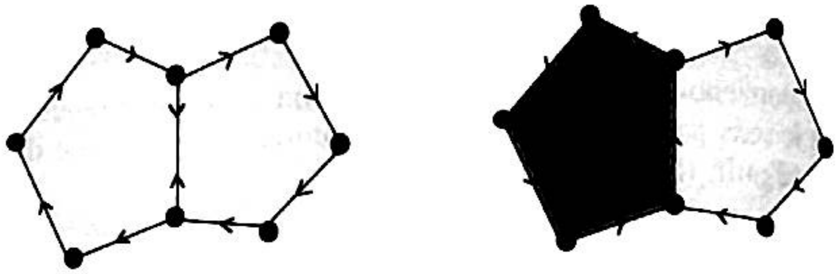


Fig.11

Car nous pouvons constater que dans le premier cas, l'orientation des bords respectifs des deux morceaux se compose agréablement pour indiquer qu'elle est l'orientation globale du nouveau bord ainsi constitué du morceau d'étoffe composé. Alors que dans l'autre cas, les orientations respectives se contredisent et empêchent de parler de l'orientation globale du bord du composé. Nous dirons que le composé est désorienté quant à son bord.

Et nous allons immédiatement préciser cela en donnant quelques définitions principales.

Nous appellerons composition par *annulation de bord* la couture de deux morceaux d'étoffe qui assure la conjonction de deux faces de même couleur (fig.12).

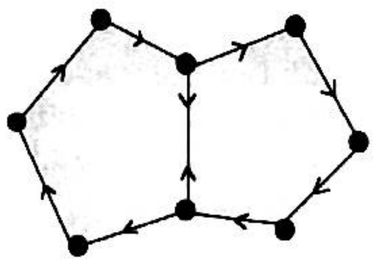


Fig.12

Le *bord* composé sera alors constitué des segments respectifs des deux bords initiaux qui n'ont pas servi au montage. Ce bord composé sera orientable. Les deux segments respectifs qui ont servi au montage se conjoignent dans des sens contraires, ce qui justifie que nous parlions de leur annulation réciproque. Ils forment ainsi ce que nous appellerons un segment de bord nul ou une *frontière* en tant que celle-ci peut s'effacer du fait que ce qui se passe (couleur) d'un côté est pareil à ce qui passe (couleur) de l'autre côté (fig.13).

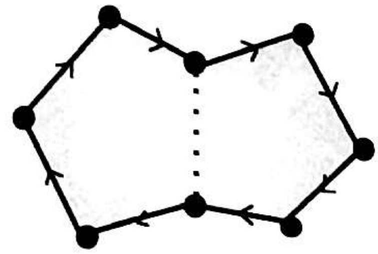


Fig.13

Nous appellerons composition par *identification de bord* [3] la composition de deux morceaux d'étoffe qui produit la proximité de deux faces de couleurs différentes (fig. 14).

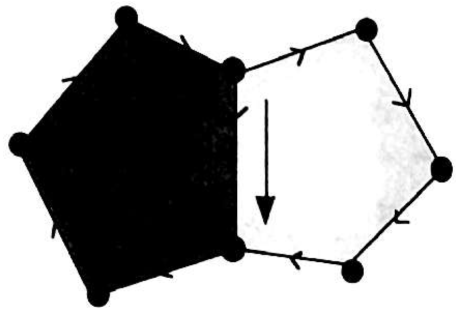


Fig.14

Nous ne pouvons parler dans ce cas du bord du composé autrement qu'en disant son *pseudo-bord*. Il est constitué des segments respectifs des deux bords initiaux qui n'ont pas servi au montage. Il n'est pas orientable ou il est désorienté. Ce sera un pseudo-bord non orienté. Les deux segments respectifs qui ont servi au montage se conjoignent dans le même sens, ce qui justifie que nous parlions de leur identification. Ils formeront ainsi ce que nous appellerons un segment de *bord qui consiste* en tant que celui-ci se trouve dans la surface obtenue, il consiste dans cette surface à séparer deux couleurs et qu'en conséquence il ne peut pas être effacé. Nous le tracerons d'un trait plus épais qui est orienté (fig.15).

[3]. Ce terme, comme celui qui précède, *annulation de bord*, nous a été proposé par J. Trentelivre alors que nous rédigions avec lui *Étoffe*. Nous l'avons adopté depuis.

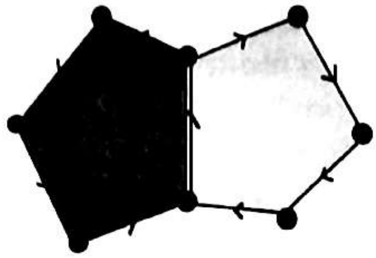


Fig.15

Il devient évident dans ce cas que la composition de trois morceaux d'étoffe devient intéressante, sachant que tous nos morceaux initiaux sont équivalents bicolores (leurs bords sont orientés) et sans singularité (morceaux de sphère), il ne peut y avoir que deux cas lorsque nous ajoutons le troisième morceau le long de deux arêtes adjacentes au segment de bord qui consiste (fig.16)

Fig.16

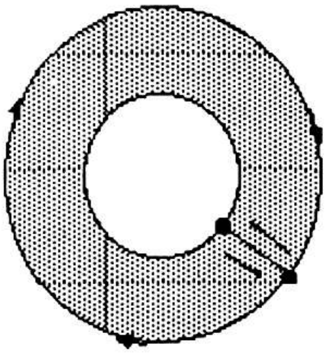
où nous voyons que le bord qui consiste va se prolonger.

Nous laissons au lecteur la suite de cette réflexion pour répondre grâce à ces éléments aux questions soulevées par nos deux présentations de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques quand on veut les accorder entre elles.

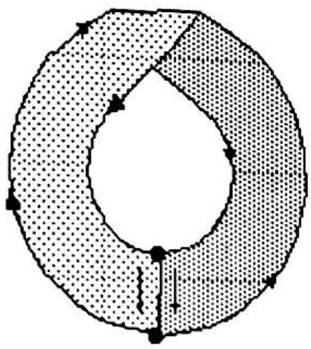
Dans cette présentation définitive nous construisons toujours ce que nous appellerons des *pavages orientables par morceaux* (spécifiques) quel que soit le mode de composition employé.

4. Réinterprétation de la théorie des surfaces en théorie des montages orientables par morceaux

a_1 - La présentation de Griffith peut se satisfaire de la composition par annulation de bord tant qu'elle ne rencontre pas de montage de genre plus compliqué que la sphère. Il se pose alors, dans le cas contraire (par exemple une bande), lorsque nous voulons refermer un premier anneau, la question d'un choix entre deux possibilités, soit un cas orientable pour un anneau sphérique, soit un cas non orientable pour l'anneau de Mœbius (fig.17).



Cas orientable
anneau sphérique



Cas non orientable
anneau de Mœbius

Fig.17

Il ne faut pas se tromper non plus en oubliant que l'anneau de Mœbius peut être obtenu par un montage de ce type (fig.18)

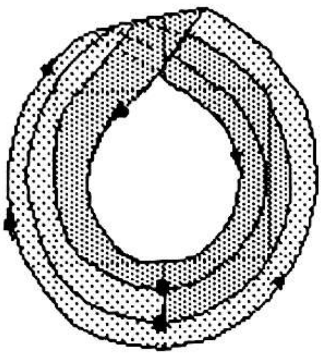


Fig.18

où nous voyons pour la première fois que le bord qui consiste peut ne plus rencontrer le *bord qui insiste* (bord orienté ou pseudo-bord non orienté) et par conséquent se fermer comme un cercle qui consiste dans l'étoffe.

a_2 - La présentation de Cartan n'utilise que des identifications de bord dans le marquage des segments qu'elle utilise pour indiquer la surface qu'elle vise à obtenir et elle utilise la plupart du temps (à de très rares expressions près) des morceaux d'étoffe à pseudo-bord non orientable. Si nous reprenons l'exemple que nous avons donné pour l'introduire (fig.19)

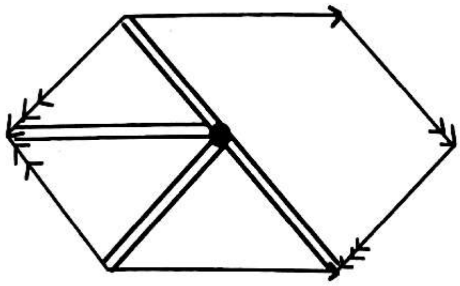


Fig.19

nous le compléterons des segments de bord qui consiste, segments qui permettent de le réorienter par morceaux en respectant les orientations du segment du pseudo-bord qui vont être identifiés dans la théorie et produire par conséquent d'autres portions de bord qui consiste.

Conclusion

Nous laissons alors au lecteur le soin de poursuivre en suivant un quelconque des différents auteurs [4] qui a développé cette théorie. Non sans conseiller de faire le plus grand cas des distinctions que nous venons de produire.

Nous ajouterons que le Dr Lacan a condensé son intérêt pour les surfaces topologiques et l'usage qu'il y a trouvé pendant dix ans (1961-1971) afin de marquer une étape dans la fondation, par sa formalisation, du discours analytique ; dans cette formalisation principale du bord et spécialement du bord qui consiste dont on peut dire qu'il a fait argument de structure sous le nom de coupure. N'a-t-il pas parlé du désir ?

On se reportera donc pour cela aux nombreux écrits de cette période jusqu'à *L'Étourdit* (E u,1971) et aux leçons de séminaires qui leur sont contemporaines.

J.-M.Vappereau
décembre 1991