Mónica Lidia Jacob

AXIOMA DE ESPECIFICACIÓN

El **axioma de especificación** es una axioma que sirve para formar nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado y una condición arbitraria .

Dados un conjunto A y una cláusula o condición S(x) , queda definido el conjunto B formado por aquellos elementos de A que verifiquen la condición S(x) .Esto se escribe :

$$B = \{x \in A : S(x)\}$$

Damos algunos ejemplos .

1) Si A es el conjunto de todos los habitantes de Argentina , sea x la variable que designa **un** habitante **cualquiera** de Argentina ; sea S(x) la condición que especifica que x reside en Tucumán .Podemos construir entonces el conjunto B formado por todos los argentinos que residen en Tucumán .Claramente , B está incluido en A pues todo el que viva en Tucumán vive en Argentina ; la relación inversa no vale pues no todo residente en Argentina , reside en Tucumán .

2) Si A es el conjunto de números enteros y S(x) es la condición definida por " x es par" , esto define el conjunto B formado por todos los números enteros que son pares .

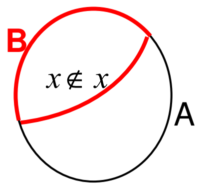
3) Tomemos ahora otro caso mas abstracto . A es un conjunto cualquiera y consideramos la cláusula S(x) que expresa que x no se pertenece a sí mismo. Escribimos

$$S(x) : \neg(x \in x) = x \notin x$$

Como resultado, queda definido el conjunto B , formado por todos aquellos elementos x que están en A y que no se pertenecen a sí mismos

$$B = \{x \in A : x \notin x\} \quad (1)$$

El diagrama de Euler que corresponde es éste : A es un conjunto cualquiera y B es sólo una parte de él ; sólo algunos elementos de A cumplen la cláusula S(x) dada en este caso por : x no pertenece a x ($x \notin x$)



Tenemos entonces el conjunto A , no importa cual ; hemos construido B, a partir de A y de la cláusula S(x): $x \notin x$ .El modo de construcción hace que podamos decir que la relación entre B y A es de inclusión , pues todos los elementos de B están en A (no es seguro que sea al revés , o sea que no todos los de A están en B) .

Recordemos en lo que sigue que B se puede escribir así (1) ; lo vuelvo a escribir :

$$B = \{x \in A : x \notin x\} \quad (1)$$

(1) escribe la igualdad de dos conjuntos: uno designado por la letra B (a izquierda del signo =) y otro , a la derecha del signo igual , que escribe el conjunto de los elementos de A que no se pertenecen a sí mismos : $\{x \in A : x \notin x\}$.

Cuando definimos el axioma de extensión dijimos que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, o bien , si valen las dos inclusiones simultáneamente. En este caso, B está incluido (2) y a la vez incluye (3) al conjunto $\{x \in A : x \notin x\}$

$B \subset \{x \in A : x \notin x\}$ (2) y , a la vez ,

$\{x \in A : x \notin x\} \subset B$ (3) [otro modo de escribir $B \supset \{x \in A : x \notin x\}$]

A su vez, la inclusión de conjuntos se puede traducir al lenguaje de proposiciones . Sean Si F y G son dos conjuntos ,ambos, subconjuntos de A , tales que F está incluido en B

$$F \subset G$$

Traducimos la inclusión de conjuntos , en lenguaje de proposiciones , utilizando el siguiente condicional . Decimos que F está incluido en G si se verifica que :

si ***y*** es un elemento de **F** , entonces, ese elemento y , tiene que ser también elemento de G . Eso se escribe

$$(z \in F) \Rightarrow (z \in G) \qquad \forall z \in A$$

Atención , por haber un condicional, no dice que todos los elementos de A estén en F; dice que aquellos que estén en F ,deberán estar en G ; los que no estén en F no están sujetos a ninguna condición .

Entonces vayamos haciendo las correspondientes traducciones para la igualdad (1) que define B

$$B = \{x \in A : x \notin x\} \quad (1)$$

$$\underbrace{B \subset \{x \in A : x \notin x\}}_{(2)} \quad \wedge \quad \underbrace{\{x \in A : x \notin x\} \subset B}_{(3)}$$

En términos proposiciones las inclusiones (2) y (3) se traducen así :

$$\underbrace{z \in B \Rightarrow z \in \{x \in A : x \notin x\}}_{(4)} \quad \wedge \quad \underbrace{z \in \{x \in A : x \notin x\} \Rightarrow z \in A}_{(5)}$$

A su vez, se pueden retraducir porque la pertenencia al conjunto descripto por la llave tiene dos condiciones ; es decir, que el elemento z esté dentro de la llave quiere decir que ese elemento, está en A y a su vez ese elemento no se pertenece a sí mismo . La x dentro de la llave es un elemento cualquiera del conjunto , por tanto si z pertenece al conjunto entre llaves, el elemento y será un x posible

Con lo cual la escritura $z \in \{x \in A : x \notin x\}$ equivale a escribir $(z \in A \wedge z \notin z)$; podemos reescribir (4) y (5) de esta manera

$$\underbrace{z \in B \Rightarrow (z \in A \wedge z \notin z)}_{(6)} \qquad \underbrace{(z \in A \wedge z \notin z) \Rightarrow z \in B}_{(7)}$$

En lo que sigue no olvidemos que la escritura (1) se traduce como la conjunción de las dos implicaciones (6) y (7)

Vamos entonces a razonar , para ver que no es posible plantear que B $\in$ A . Para ver que no es posible, hagamos un razonamiento por el absurdo ,que consiste en suponer que sí es posible .

Partimos de suponer que vale $B \in A$. Si esto es así, tenemos dos opciones que se aprecian en el diagrama ; o bien B está dentro de B (zona roja) o bien B no está en B

$$B \in A \begin{cases} \text{a)} \quad B \in B \\ \text{b)} \quad B \notin B \end{cases}$$

Consideremos por separado ambas situaciones .

a) Tenemos que B pertenece a A , pero en el caso dentro de la parte roja , es decir B pertenece a B . Si B pertenece a B , podemos utilizar la expresión (6) que nos dice que sucede para <u>cualquier elemento z</u> que pertenezca a B ; en particular cuando la variable z es sustituida por la letra B , obtenemos

$B \in B \Rightarrow (B \in A \wedge B \notin B)$ (6') que reescribo así :

$$\boxed{B \in B} \Rightarrow \begin{Bmatrix} B \in A \\ \boxed{B \notin B} \end{Bmatrix} \quad \text{(6'')}$$

Hemos obtenido (6') sustituyendo en (6) cada letra z , por la letra B

¿Qué sucede? La expresión (6'), y se aprecia mejor en (6'') nos dice que si B pertenece a B , entonces B no pertenece a B y esa es una contradicción , pues no puede ser que esté en B y no esté en B .

Procedamos a analizar la otra opción ,la opción b) ; entonces decimos que

$B \notin B$;pero como el inciso b) es una de las opciones de suponer que $B \in A$, entonces valen ambas proposiciones y por lo tanto su conjunción

$B \in A \wedge B \notin B$

Pero esta última es el antecedente de (7') obtenido a partir de (7) sustituyendo la letra z que figura en (7) por la letra B

$(B \in A \wedge B \notin B) \quad \Rightarrow B \in B$ (7')

Si es valido el antecedente de 7' se infiere el consecuente . Y llegamos nuevamente a una contradicción .Partimos en el punto b) de afirmar que $B \notin B$ y concluimos que $B \in B$.

Tanto en la situación a) como en la b) llegamos a un absurdo, absurdo que proviene de suponer que se podía escribir $B \in A$. Luego , no es posible escribir esa relación .

Este razonamiento se realizó para un A cualquiera y el conjunto formado por los elementos de A que no se pertenecen a sí mismos .

Hemos construido por tanto un conjunto que no pertenece al conjunto A ; esto puede leerse como no hay universo pues para cualquier conjunto, puede construirse otro, que no sea elemento del primero .

Ese fue el razonamiento de, *de Morgan*.